

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

CARACTÉRISATIONS DES MOTS DE CHRISTOFFEL

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

MÉLODIE LAPOINTE

FÉVRIER 2019

REMERCIEMENTS

Je souhaite remercier Christophe Reutenauer, mon directeur de recherche. Merci pour ses commentaires constructifs ayant permis d'améliorer mes compétences en recherche et en écriture ainsi que pour sa disponibilité.

Je souhaite aussi remercier Franco Saliola, Christophe Holweg, François Bergeron, Srečko Brlek et Alexandre Blondin Massé qui sont tous des professeurs du LaCIM. Vous avez fait de mon parcours en maîtrise un chemin rempli de découvertes.

Merci aussi à mes collègues étudiants : Nadia, Pauline, Sébastien, Aram, Fanny, Stéphanie et Cédric. Les longues heures passées à faire de la recherche au LaCIM, à s'occuper de l'association étudiante ou à faire des travaux ensemble ont été très agréables. Les souvenirs qui me resteront sont le temps agréable passé tous ensemble.

Je tiens à remercier le CRSNG et le FRQNT pour leur soutien financier. Grâce à ces organismes, j'ai eu la chance de consacrer les deux dernières années à la réalisation de mon projet de maîtrise.

Finalement, je tiens à remercier ma famille. Merci à Ginette et Marc, mes parents, qui m'ont encouragée à poursuivre mes études et à réaliser mes rêves. Merci Martin, d'être à mes côtés au quotidien et de me soutenir dans la réalisation de ce projet.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES TABLEAUX	v
LISTE DES FIGURES	vii
RÉSUMÉ	ix
INTRODUCTION	1
CHAPITRE I	
INTRODUCTION À LA COMBINATOIRE DES MOTS	3
1.1 Définition	3
1.2 Propriétés	5
1.3 Suites sturmiennes	8
1.4 Mots de Lyndon	10
CHAPITRE II	
MOTS DE CHRISTOFFEL : GÉOMÉTRIE ET COMBINATOIRE	13
2.1 Définitions géométriques	13
2.2 Factorisation standard	18
2.3 Factorisation palindromique	23
2.4 Morphisme de Christoffel	25
2.5 Palindromes, périodes et conjugués	27
2.6 Graphe de Cayley	35
CHAPITRE III	
LES MOTS STANDARDS	39
3.1 Mots standards et fractions continues	39
3.2 Facteurs et conjugués	45
3.3 Équilibre	49
3.4 Mot de Lyndon	51

CHAPITRE IV	
FORME NORMALE ET PÉRIODE	59
4.1 Forme normale	59
4.2 Période des conjugués	63
4.3 Caractérisation de la forme normale	70
CONCLUSION	75
APPENDICE A	
LISTE DE CARACTÉRISATIONS DES MOTS DE CHRISTOFFEL . .	77
BIBLIOGRAPHIE	79

LISTE DES TABLEAUX

Tableau		Page
1.1	Facteurs, préfixes et suffixes	5
1.2	Les palindromes itérés successifs du mot <i>abbaa</i>	6
3.1	Mot directeur des palindromes itérés.	41
3.2	Clôture palindromique du mot <i>vx</i>	52
4.1	Forme normale des conjugués des mots de Christoffel.	65

LISTE DES FIGURES

Figure	Page
2.1 Mot de Christoffel inférieur	14
2.2 Mot de Christoffel supérieur	14
2.3 Symétrie du mot centrale	16
2.4 Mot mécanique inférieur	17
2.5 Suite d'intersections	17
2.6 Mot du billard	17
2.7 Factorisation standard	19
2.8 Factorisation standard	20
2.9 Règle de construction de l'arbre de Christoffel	21
2.10 Arbre de Christoffel	22
2.11 Factorisation palindromique	24
2.12 Symétrie du morphisme E	28
2.13 Graphe de Cayley	36
2.14 Les étiquettes des points sur le chemin de Christoffel	37
4.1 Les conjugués $\sigma_i(w)$ pour $1 \leq i \leq \frac{ v }{2}$	68
4.2 Les conjugués $\sigma_i(w)$ pour $ w - \alpha \leq i \leq w - 1$	68
4.3 Les conjugués $\sigma_i(w)$ pour $ v + 1 \leq i \leq v + \alpha $	69
4.4 Les conjugués $\sigma_i(w)$ pour $ v + \alpha \leq i \leq w - \alpha $	69
4.5 Période minimale	70
4.6 Arbre de Christoffel	73

RÉSUMÉ

Les mots de Christoffel, c.-à-d. les mots codants les demi-droites à pente rationnelle dans le plan cartésien, ont été largement étudiés dans les trente dernières années. Parmi les résultats découverts, soulignons la connaissance d'une quinzaine de caractérisations de cette famille de mots. Dans ce mémoire, le but est de répertorier les différentes caractérisations connues et de les démontrer. Les mots de Christoffel peuvent être étudiés de plusieurs façons : combinatoire, géométrique, etc. Les caractérisations présentées ici sont regroupées sous deux aspects : la géométrie et les suites sturmiennes. À partir de la géométrie des mots de Christoffel, certains outils pour travailler avec ceux-ci tels que la factorisation standard, la factorisation palindromique et les morphismes de Christoffel sont présentés. Ensuite, des caractérisations combinatoires des mots de Christoffel reliés aux concepts de périodes, palindromes et conjugués sont démontrées. Les liens entre les suites sturmiennes et les mots de Christoffel sont le point central de la suite de notre étude. De plus, les mots de Christoffel, leurs facteurs ainsi que leurs conjugués sont tous des mots sturmiens. Finalement, un nouvel outil sur les mots sturmiens permet de démontrer une nouvelle caractérisation des conjugués des mots de Christoffel ainsi qu'une formule donnant la période minimale des conjugués des mots de Christoffel.

Mots clés : Mot de Christoffel, période, palindrome, mot standard, forme normale

INTRODUCTION

La combinatoire des mots est devenue un domaine d'étude à part entière récemment dans l'histoire des mathématiques en prenant de plus en plus d'importance dans les quarante dernières années. Les premiers travaux présentant implicitement les mots de Christoffel sont ceux de Bernouilli (Bernouilli, 1771), Christoffel (Christoffel, 1875) et Markoff (Markoff, 1879; Markoff, 1880). Cette famille de mots a été étudiée en détail dans les années 1990 dans les travaux de Berstel, de Luca, Mignosi, Borel et Laubie où apparaissent une grande partie des caractérisations démontrées dans ce travail.

Les mots de Christoffel ont plusieurs applications reliées aux fractions continues, à la géométrie discrète, à la dynamique symbolique, aux langages formels ainsi qu'à la compression de données. L'appellation mot de Christoffel est apparue dans les années 1990 (Berstel, 1990). Par conséquent, ils apparaissent sous plusieurs autres noms tels que mots standards, mots centraux, suites d'intersections, etc. dans la littérature. L'objectif principal de ce mémoire est de présenter les caractérisations connues des mots de Christoffel. En plus, des caractérisations des mots de Christoffel, il y a aussi plusieurs caractérisations de la classe de conjugaison des mots de Christoffel. Ces dernières ne sont pas présentées dans ce travail bien que le dernier chapitre porte sur une nouvelle caractérisation des conjugués des mots de Christoffel. L'article (Berstel, 2007) et le livre (Berstel *et al.*, 2009) présentent eux aussi la plupart des caractérisations que l'on retrouve dans ce mémoire, mais ces résultats sont pour la plupart présentés sans démonstration.

Parmi les multiples approches possibles pour aborder le sujet, la définition géo-

métrique est celle qui a été retenue. À partir de ce point de vue, les différentes caractérisations reliées à la combinatoire des mots, aux graphes de Cayley, aux fractions continues, aux mots sturmiens et aux mots de Lyndon sont abordées. En tout, plus de 15 caractérisations de ses mots sont démontrées.

Le chapitre 1 présente les notions de base de la combinatoire des mots nécessaires à la compréhension des chapitres suivants. De plus, il contient la définition de deux familles de mots, les mots sturmiens et les mots de Lyndon, qui sont toutes deux nécessaires à la définition de certaines caractérisations des mots de Christoffel.

Dans le chapitre 2, les mots de Christoffel sont d'abord définis de façon géométrique. Ensuite, plusieurs propriétés sont abordées afin d'avoir les outils nécessaires pour démontrer les caractérisations combinatoires de ces mots. Le chapitre termine par la présentation de plusieurs caractérisations reliées aux périodes des mots, aux palindromes, aux conjugués ainsi qu'au graphe de Cayley.

Dans le chapitre 3, les liens entre les mots sturmiens et les mots de Christoffel sont mis en évidence à l'aide des fractions continues. Les propriétés d'équilibre de cette famille de mots sont ensuite étudiées afin de présenter plusieurs caractérisations qui en découlent. Finalement, les mots de Lyndon sont reliés aux mots de Christoffel grâce aux idées développées précédemment.

Dans le chapitre 4, la forme normale des mots sturmiens est définie. Grâce à celle-ci, une nouvelle caractérisation des conjugués des mots de Christoffel en termes de leur forme normale est démontrée. Cette caractérisation est possible, car les mots de Christoffel et leurs conjugués sont des mots sturmiens. En construisant, la forme normale des conjugués des mots de Christoffel ont déduit une formule calculant la période minimale des conjugués des mots de Christoffel.

CHAPITRE I

INTRODUCTION À LA COMBINATOIRE DES MOTS

Dans ce chapitre, l'objectif est de présenter les notions de base de la combinatoire des mots qui seront utilisées tout au long de ce mémoire. La terminologie et la notation utilisées sont basées sur celle des ouvrages suivants (Lothaire, 1983; Lothaire, 2002). Dans cette section, les résultats sont présentés sans démonstrations, car ce sont des résultats classiques de la combinatoire des mots.

1.1 Définition

Soit A un ensemble fini généralement dénommé *alphabet*. Les éléments de cet ensemble A sont appelés des *lettres*. Un *mot* w sur l'alphabet A est une suite finie de lettres c'est-à-dire $w = a_1a_2 \dots a_n$ avec $a_i \in A$ pour $0 < i \leq n$. Le mot vide est désigné par le symbole ε . L'ensemble des mots sur un alphabet A est noté A^* et $A^+ = A^* - \{\varepsilon\}$. L'ensemble des mots de longueur $n \in \mathbb{N}$ sur A est désigné par A^n . La concaténation de deux mots $u, v \in A^*$ définie par $u \cdot v = uv$ est une opération associative dont ε est l'élément neutre. Ainsi, A^* muni de la concaténation est un monoïde.

Exemple 1. Sur l'alphabet $A = \{a, b\}$, le mot *aabbab* est un élément du monoïde A^* tandis que le mot *abcabba* n'est pas un de ces éléments, car la lettre $c \notin A$.

Deux mots $u, v \in A^*$ sont *conjugués* s'il existe deux mots $x, y \in A^*$ tels que $u = xy$

et $v = yx$. Une *permutation cyclique*, notée σ_i , est définie par $\sigma_i(a_1a_2 \dots a_n) = a_{i+1} \dots a_n a_1 \dots a_i$ pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$. De toute évidence, un mot ainsi que toutes ses permutations cycliques sont conjugués. De plus, la conjugaison est une relation d'équivalence. La classe d'équivalence d'un mot w c'est-à-dire l'ensemble $\{\sigma_i(w) \mid 0 \leq i < |w| \text{ et } i \in \mathbb{N}\}$ est appelée *mot circulaire*. Un mot w est *primitif*, si pour tout $u \in A^+$ tel que $w = u^n$, on a que $n = 1$. Si w est un mot primitif, on a que toutes les permutations cycliques de w sont des mots distincts.

Le résultat suivant est démontré dans (Lothaire, 1983) :

Lemme 1. *Deux mots $u, v \in A^+$ satisfont l'égalité $uv = vu$ si et seulement s'ils sont des puissances d'un même mot.*

Soit $w = a_1a_2 \dots a_n \in A^*$ un mot. La *longueur* de w , notée $|w|$, est n . De plus, le nombre d'occurrences d'une lettre $x \in A$ dans le mot w est noté $|w|_x$. Un mot w est un *facteur* du mot $u \in A^*$ s'il existe deux mots $x, y \in A^*$ tels que $u = xwy$. Si $x = \varepsilon$, alors w est un *préfixe* du mot u et si $y = \varepsilon$, alors w est un *suffixe* du mot u . Un préfixe, un suffixe ou un facteur d'un mot sont dit propres s'ils ne sont pas égaux au mot lui-même. L'ensemble des facteurs, l'ensemble des préfixes et l'ensemble des suffixes d'un mot w sont notés respectivement par $\text{FACT}(w)$, $\text{PREF}(w)$, $\text{SUF}(w)$. Par exemple, le tableau 1.1 contient la liste des facteurs, des préfixes et des suffixes du mot *aabab*. Le concept de facteur peut aussi être appliqué au mot circulaire. On appelle *facteur circulaire* du mot w un mot u tel que $u \in \text{FACT}(\sigma_i(w))$ pour $i \in \{0, 1, \dots, |w| - 1\}$.

Exemple 2. *Les facteurs circulaires du mot aabab sont $\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, aab, aba, bab, baa, aaba, abab, baba, abaa, baab, aabab, ababa, babaa, abaab, baaba$.*

Lemme 2. (Borel et Reutenauer, 2006) *Soit w un mot de longueur n . Le mot w est primitif si et seulement si le mot w a au moins $k + 1$ facteurs circulaires de longueur k pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$.*

Un facteur v de w est *spécial à droite* si $vx \in \text{FACT}(w)$ pour tout $x \in A$. De même, un facteur de v de w est spécial à gauche si $xv \in \text{FACT}(w)$ pour tout $x \in A$.

Tableau 1.1: Facteurs, préfixes et suffixes du mot $aabab$.

Facteurs	$\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, aab, aba, bab, aaba, abab, aabab$
Préfixes	$\varepsilon, a, aa, aab, aaba, aabab$
Suffixes	$\varepsilon, b, ab, bab, abab, aabab$
Facteurs spéciaux à droite	ε, a
Facteurs spéciaux à gauche	ε, a, ab

1.2 Propriétés

L'*image miroir* d'un mot $w = a_1a_2 \dots a_n$ avec $a_i \in A$ est définie par $R(w) = a_n a_{n-1} \dots a_1$. Un mot w est un *palindrome* si et seulement si $w = R(w)$. L'ensemble des palindromes est noté PAL.

La *clôture palindromique* à droite d'un mot w est le plus court palindrome dont w est un préfixe, notons cette opération $w^{(+)}$.

Exemple 3. La *clôture palindromique* du mot $aabaaaab$ est $aabaaabaa$.

Cette opération a été introduite par de Luca (de Luca, 1997b; de Luca, 1997a). Il est possible d'exprimer $w^{(+)}$ par $uvR(u)$ où v est le plus long suffixe de w qui est un palindrome. Soit w un mot fini, le *palindrome itéré* à droite produit par w est le résultat de la fonction récursive suivante :

$$\begin{aligned} \rho : A^* &\rightarrow \text{PAL} \\ wa &\mapsto (\rho(w)a)^{(+)} \\ \varepsilon &\mapsto \varepsilon \end{aligned}$$

avec $a \in A$. Le tableau 1.2 est un exemple de la fonction ρ .

Tableau 1.2: Les palindromes itérés successifs du mot $abbaa$.

w	$\rho(w)$
a	a
ab	aba
abb	$ababa$
$abba$	$ababaababa$
$abbaa$	$ababaababaababa$

Pour chaque lettre $x \in A$, on définit un morphisme appelé μ_x . Le morphisme μ_x envoie $\mu_x(x) = x$ et $\mu_x(y) = xy$ pour tout $y \neq x$ appartenant à A . Ce morphisme permet d'établir une autre formule pour calculer $\rho(w)$ qui a été démontrée par Justin :

Lemme 3. Formule de Justin (*Justin, 2005*) *Pour tout $w \in A^*$ et $x \in A$, on a que*

$$\rho(xw) = \mu_x(\rho(w))x.$$

En plus, Justin a démontré que la fonction ρ est injective sur A^* .

Un mot $w = a_1a_2 \dots a_n$ a une *période* p si pour tout entiers $i, i + p \in \{1, \dots, n\}$, $a_i = a_{i+p}$. Une période est dite non-triviale si $p < n$. De plus, un mot w ayant une période non-triviale p est dit *périodique*. Un mot w a un *bord* si u est un préfixe propre de w , en plus d'être un suffixe propre de w . Un mot n'ayant aucun préfixe satisfaisant la dernière condition est appelé *sans bord*. Ces deux concepts sont reliés, car un mot est périodique si et seulement s'il a un bord. Les résultats suivants sur les périodes sont utiles pour notre travail.

Lemme 4. (*de Luca, 1997b*) *Un palindrome w a une période non triviale p si et seulement si w a un suffixe de longueur $|w| - p$ qui est aussi un palindrome.*

Théorème 1. (*Fine et Wilf, 1965*) Soit p et q deux périodes de w et $|w| \geq p + q - \text{PGCD}(p, q)$, alors $\text{PGCD}(p, q)$ est aussi une période de w .

Lemme 5. (*de Luca et de Luca, 2006*) Un mot $w \in A^*$ une période $p \leq |w|$ si et seulement si tous ses facteurs de longueur p sont dans la même classe de conjugaison.

Une *factorisation* d'un mot w est une suite finie (w_1, w_2, \dots, w_k) de mots tel que la relation $w = w_1 w_2 \dots w_k$ est satisfaite sur le monoïde A^* . Soit X un ensemble de mot. L'ensemble X est *fermé par image miroir* si pour tout $x \in X$, on a que $R(x) \in X$. De plus, X est *fermé par facteurs* si pour tout $x \in X$, $\text{FACT}(x)$ est un sous-ensemble de X .

La propriété suivante est définie sur un alphabet binaire $A = \{a, b\}$ (par contre, il existe des généralisations de ce concept sur d'autres alphabets). Un mot $w \in A^*$ est *équilibré* si pour tout $u, v \in \text{FACT}(w)$ tel que $|u| = |v|$, la relation suivante est satisfaite :

$$||u|_a - |v|_a| \leq 1.$$

Si w est équilibré la relation $||u|_b - |v|_b| \leq 1$ est aussi respectée, car l'alphabet est binaire. Si un mot est équilibré, alors tous ses facteurs le sont aussi. Les deux propositions suivantes permettent d'établir des critères pour décider si un ensemble de mots est équilibré ou non.

Lemme 6. (*Coven et Hedlund, 1973*) Soit X un ensemble de mots fermé par facteurs. Si tous les mots de X sont équilibrés, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|X \cap A^n| \leq n + 1.$$

Lemme 7. (*Coven et Hedlund, 1973*) Soit F un ensemble de mot sur l'alphabet binaire $\{a, b\}$ fermé par facteurs. L'ensemble F n'est pas équilibré si et seulement s'il existe un palindrome m tel que $ama \in F$ et $bmb \in F$.

Les mots de Christoffel sont définis sur un alphabet binaire, alors dans la suite de ce texte A désigne $\{a, b\}$. De plus, l'opérateur $\bar{\cdot}$ est défini sur l'alphabet binaire A par $\bar{a} = b$ et $\bar{b} = a$.

Exemple 4. $\overline{aabbaba} = bbaabab$.

1.3 Suites sturmiennes

Les suites sturmiennes, souvent appelées mots sturmiens infinis dans la littérature (Morse et Hedlund, 1940), partagent de nombreuses propriétés avec les mots de Christoffel. Nous les appelons suites sturmiennes afin d'accentuer la distinction entre les mots sturmiens finis et infinis tout au long de ce texte. De plus, les mots sturmiens sont l'un des points de départ pour l'étude de ces suites dans plusieurs articles (de Luca et Mignosi, 1994; de Luca, 1997b; Berstel et de Luca, 1997). Les suites sturmiennes peuvent être définies de multiples façons, certaines sont de nature combinatoire tandis que d'autres sont de nature géométrique.

Une *suite sturmienne* est un mot infini sur l'alphabet A encodant la suite d'intersections entre le plan cartésien \mathbb{Z}^2 et une demi-droite à pente irrationnelle. Une intersection entre une droite verticale du plan cartésien et la demi-droite est représentée par la lettre a tandis qu'une intersection entre une droite horizontale du plan et la demi-droite est représentée par la lettre b . Une suite sturmienne débutant à l'origine est appelée *suite caractéristique*. Une propriété combinatoire simple permet de distinguer les mots sturmiens des suites caractéristiques.

Lemme 8. (Lothaire, 2002) *Une suite sturmienne s est une suite caractéristique si et seulement si $0s$ et $1s$ sont toutes deux des suites sturmiennes.*

Une définition combinatoire des suites sturmiennes est que ce sont les suites qui ont exactement $n + 1$ facteurs de longueur n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, un mot s

est sturmien si et seulement s'il a exactement 1 facteur spécial à droite pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent, un suffixe d'un mot sturmien est aussi un mot sturmien.

Exemple 5. Soit $A = \{a, b\}$. Le morphisme φ défini par

$$\varphi : \begin{array}{l} a \mapsto ab \\ b \mapsto a \end{array}$$

La suite de Fibonacci est la suite infinie $f = \varphi^\infty(a)$. Les premières lettres de la suite f sont

$$f = abaababaabaababaababaabaabaabaab\dots$$

C'est une suite sturmiennne. Une des façons de le vérifier est de prouver que cette suite a exactement un facteur spécial à droite pour tout n (voir (Lothaire, 2002)).

Une propriété des suites infinies est qu'une suite est éventuellement périodique si et seulement s'il existe un entier n tel que $|\text{FACT}(w) \cap A^n| \leq n$. Ainsi, une suite est non périodique si pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre de facteurs de longueur n de cette suite est plus grand ou égal à $n + 1$. On en déduit que les suites non périodiques et équilibrées sont sturmiennes à l'aide du lemme 6. De plus, Morse et Hedlund ont démontré qu'une suite est sturmiennne si et seulement si cette même suite est non-périodique et équilibrée (Morse et Hedlund, 1940).

Une autre caractérisation de ces suites est une généralisation d'une construction de la suite de Fibonacci. En effet, la suite de Fibonacci peut aussi être définie par $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ avec $f_n = \varphi^n(a)$ ce qui est équivalent à

$$f_0 = a, f_1 = ab, f_{n+1} = f_n f_{n-1}.$$

On a que $|f_n|$ est égal au nième nombre de Fibonacci ce qui explique le nom de la suite. On a que la suite de Fibonacci est une suite caractéristique. Soit $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ une suite arbitraire d'entiers naturels tels que $a_0 \geq 0$ et $a_i > 0$

pour tout $i \in \mathbb{N} - \{0\}$. Définissons récursivement une suite de mots $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ avec

$$s_{-1} = a, s_0 = b, s_{n+1} = s_n^{a_n} s_{n-1},$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, la suite caractéristique s est $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$. La suite $(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$ est appelée mot directeur de s . La suite de Fibonacci est la suite caractéristique ayant le mot directeur $(0, 1, 1, \dots)$.

Les facteurs finis d'une suite sturmiennne sont appelés *mots sturmiens*. L'ensemble des mots sturmiens est dénoté par ST. Les suites caractéristiques sont centrales dans l'étude des suites sturmiennes, car il a été démontré par (Mignosi, 1989) que pour toute suite sturmiennne s , il existe une suite caractéristique c telle que $\text{FACT}(s) = \text{FACT}(c)$. Par conséquent, l'ensemble ST est équivalent à l'ensemble des facteurs des suites caractéristiques. Une caractérisation combinatoire particulièrement utile des mots sturmiens a été démontrée par (Dulucq et Gouyou-Beauchamps, 1990) :

Théorème 2. *Un mot s est sturmien si et seulement si s est équilibré.*

1.4 Mots de Lyndon

L'ordre lexicographique sur A^+ est un ordre total sur l'alphabet A étendu au mot du monoïde de la façon suivante : pour tout $u, v \in A^+$, $u < v$ si et seulement si u est un préfixe de v ou bien il existe des mots $r, s, t \in A^+$ et des lettres $a < b$ tels que $u = ras$ et $v = rbt$. Évidemment, l'ordre lexicographique est un ordre total sur le monoïde A^+ .

Un *mot de Lyndon* u est un mot primitif qui est minimal dans sa classe de conjugaison c.-à-d. $u \leq \sigma_i(u)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. L'ensemble de mots de Lyndon est noté \mathcal{L} .

Exemple 6. *Sur l'alphabet $A = \{a, b\}$ avec $a < b$, les premiers mots de Lyndon*

sont

$$\mathcal{L} = \{a, b, ab, aab, abb, aaab, aabb, abbb, aaaab, aaabb, aabab, \dots\}.$$

La définition d'un mot de Lyndon nous permet de déduire que pour toute factorisation non triviale du mot de Lyndon $w = uv$, on a que $w < vu$, car vu est un conjugué de w . Lyndon (Lyndon, 1954) a démontré que w est un mot de Lyndon si et seulement si pour toute factorisation non triviale $w = uv$, on a que $w < v$. Cette caractérisation nous permet de déduire que les mots de Lyndon ne sont pas périodiques.

Un autre résultat important démontré par Chen, Fox et Lyndon (Chen *et al.*, 1958) est leur *factorisation standard*. La factorisation standard d'un mot de Lyndon w est la paire (l, m) avec $l, m \in \mathcal{L}$ tel que $w = lm$ et m est le suffixe de longueur maximale de w qui est un mot de Lyndon. Cette paire existe pour tous les mots de Lyndon. Elle permet de donner une règle pour construire les mots de Lyndon. En effet, si u, v sont des mots de Lyndon avec $u < v$, alors le mot uv est aussi un mot de Lyndon.

Il y a une autre façon de factoriser les mots de Lyndon en un produit de mots de Lyndon, appelé *factorisation à gauche* : si w est un mot de Lyndon et que u est le plus long préfixe de w étant un mot de Lyndon, alors $w = uv$ avec v mot de Lyndon et $u < v$. La factorisation standard, aussi appelée factorisation à droite, et la factorisation à gauche coïncident dans certains cas. Ce phénomène permet de définir une deuxième notion d'équilibre propre aux mots de Lyndon, appelé *régulier*¹ qui a été introduite par Melançon dans l'article (Melançon, 1999). Un mot de Lyndon est régulier si w est une lettre, ou bien il existe une factorisation (u, v) telle que la factorisation à gauche et la factorisation standard coïncide et

1. Cette propriété est appelée Christoffel-Lyndon dans (Melançon, 1999), «balanced₂» dans (Berstel *et al.*, 2009) et «equilibrated» dans (Reutenauer, 2016).

que u et v sont tous deux des mots de Lyndon réguliers.

Exemple 7. *Le mot aabab est régulier.*

Un mot de Lyndon est propre s'il est différent d'une lettre. Le lemme suivant est utile pour démontrer une caractérisation des mots de Christoffel.

Lemme 9. *(Reutenauer, 2015) Soit m et w des mots de Lyndon tel que m est un facteur propre de w . Alors m est soit un facteur du plus long préfixe propre de w qui est un mot de Lyndon ou du plus long suffixe propre de w qui est un mot de Lyndon.*

CHAPITRE II

MOTS DE CHRISTOFFEL : GÉOMÉTRIE ET COMBINATOIRE

2.1 Définitions géométriques

D'un point de vue géométrique, un mot de Christoffel est la discrétisation d'un segment de droite à pente rationnelle. Plusieurs techniques sont présentées dans (Berstel, 1990) pour formaliser la discrétisation d'un tel segment. La définition géométrique utilisée dans les articles (Osborne et Zieschang, 1981; Dulucq et Gouyou-Beauchamps, 1990; Borel et Laubie, 1993; Berstel *et al.*, 2009) est le point de départ de cette étude sur les mots de Christoffel.

Soit p et q deux nombres naturels premiers entre eux. Considérons deux points A et B dans le plan discret tel que $B = A + (p, q)$. Le chemin discret entre les points A et B satisfaisant les deux conditions suivantes :

- (i) il est strictement en dessous du segment $[AB]$;
- (ii) le polynôme délimité par le segment $[AB]$ et le chemin discret ne contient aucun point entier autre que ceux appartenant à ce chemin ;

est noté l . Le *mot de Christoffel inférieur* de pente q/p est le mot sur le monoïde libre A^* représentant le chemin discret l où a est un pas horizontal et b un pas vertical.

Exemple 8. *Le mot de Christoffel inférieur de pente $5/8$ est $aabaababaabab$ (voir figure 2.1).*

Le *mot de Christoffel supérieur* de pente q/p est défini de manière analogue en remplaçant la première condition par : le chemin discret est strictement au-dessus du segment $[AB]$ (voir figure 2.2 pour un exemple).

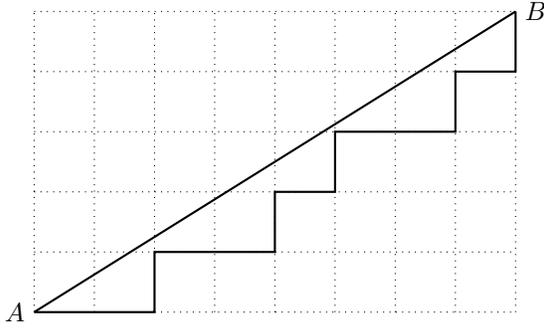


Figure 2.1: Mot de Christoffel inférieur de pente $5/8$: $aabaababaabab$.

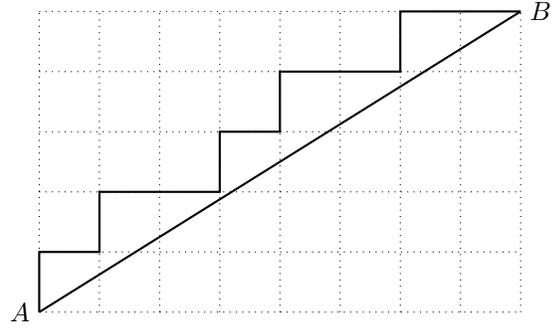


Figure 2.2: Mot de Christoffel supérieur de pente $5/8$: $babaababaabaa$.

Définition 1. *Un mot de Christoffel est un mot sur l'alphabet A qui est un mot de Christoffel inférieur ou bien un mot de Christoffel supérieur.*

Dans la suite du texte, l'ensemble des mots de Christoffel est noté \mathcal{C} tandis que l'ensemble des mots de Christoffel inférieurs et supérieurs sont notés \mathcal{C}_{inf} et \mathcal{C}^{sup} respectivement. Le mot vide n'est pas un mot de Christoffel, mais les lettres de l'alphabet soit a, b en sont. Tous les mots de Christoffel sont propres à l'exception des mots a et b .

Soit w un mot de Christoffel de pente q/p . Le nombre d'occurrences de la lettre a dans le mot w est p tandis qu'il y a q occurrences de la lettre b dans le mot. Par conséquent, la longueur du mot w est $p + q$.

Lemme 10. *(Dulucq et Gouyou-Beauchamps, 1990; de Luca et Mignosi, 1994) Le nombre de mots de Christoffel de longueur n est $2\varphi(n)$ où φ est la fonction d'Euler.*

Démonstration. Soit w un mot de Christoffel de pente q/p . La longueur de w est $p + q = n$ avec $\text{PGCD}(p, q) = 1$. Ainsi, il y a un mot de Christoffel inférieur pour chaque entier p relativement premier à $p + q$, car $\text{PGCD}(p, q) = \text{PGCD}(p, p + q)$. Puisque la fonction d'Euler donne le nombre d'entiers relativement premiers à n , on a que le nombre de mots de Christoffel (inférieurs et supérieurs) est $2\varphi(n)$. ■

Le mot de Christoffel inférieur propre de pente q/p est l'image miroir du mot de Christoffel supérieur propre de même pente, car la rotation de 180° préserve un rectangle (voir figure 2.3).

Lemme 11. *Un mot de Christoffel inférieur propre est de la forme amb avec m un palindrome. De plus, le mot de Christoffel supérieur est de la forme bma .*

Le palindrome m est souvent appelé *mot central* dans la littérature (Lothaire, 2002; Berstel, 2007). Nous utiliserons aussi cette terminologie, car ce ne sont pas tous les palindromes qui sont des mots centraux.

Démonstration. Un mot de Christoffel inférieur débute par la lettre a et termine par la lettre b , car il est situé en dessous du segment qu'il discrétise. Les points d'intersection entre le segment et la grille sont symétriques, car le rectangle est préservé par une rotation de 180° autour de son centre de gravité. De plus, il y a une bijection entre les pas élémentaires sauf les deux extrémités et les points d'intersection, voir figure 2.3. Donc, m est un palindrome. Puisqu'un mot de Christoffel supérieur est l'image miroir d'un mot de Christoffel inférieur, on obtient le résultat souhaité. ■

Lemme 12. *Soit w un mot de Christoffel. Le mot w ainsi que tous ses conjugués sont primitifs.*

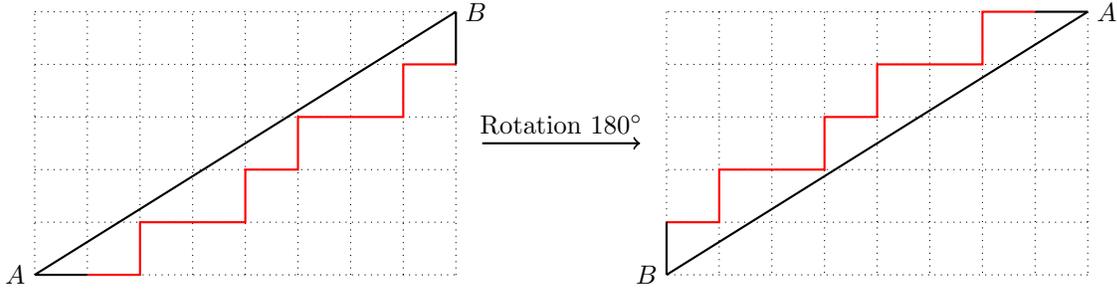


Figure 2.3: La partie rouge du chemin est égale sur le mot de Christoffel inférieur et sur la rotation du chemin de 180° autour du centre du rectangle.

Démonstration. Soit w un mot de Christoffel dont la pente est q/p . Supposons qu'un conjugué de w ne soit pas primitif et notons-le z . Il existe un mot $u \in A^*$ et un entier $d > 1$ tel que $z = u^d$. Puisque le mot z est conjugué à w , on a que $|z|_a = |w|_a = p$ et $|z|_b = |w|_b = q$. Par conséquent, d divise les entiers p et q , car $z = u^d$. Donc, $\text{PGCD}(p, q) \geq d > 1$. Ce qui est impossible, car w est un mot de Christoffel ce qui implique que $\text{PGCD}(p, q) = 1$. Donc, w ainsi que tous ses conjugués sont des mots primitifs. ■

Les figures 2.4, 2.5 et 2.6 illustrent d'autres définitions géométriques des mots de Christoffel apparaissant sous d'autres noms dans la littérature. Ces trois autres familles de mots sont définies à partir d'un nombre réel α , la correspondance avec les mots de Christoffel est vraie dans le cas où α est un mot rationnel. Le cas où α est irrationnel est relié aux suites sturmiennes.

Les *mots mécaniques* de pente rationnelle α présentés dans (Lothaire, 2002; Morse et Hedlund, 1940) sont définis sur l'alphabet $\{0, 1\}$ par les formules suivantes :

$$s_{\alpha, \rho}(n) = \begin{cases} \lfloor \alpha(n+1) + \rho \rfloor - \lfloor \alpha n + \rho \rfloor & \text{si } s \text{ est un mot mécanique inférieur,} \\ \lceil \alpha(n+1) + \rho \rceil - \lceil \alpha n + \rho \rceil, & \text{si } s \text{ est un mot mécanique supérieur,} \end{cases}$$

où $n \in \mathbb{N}^*$ et ρ est un nombre réel. Ce sont les mots associés avec la droite

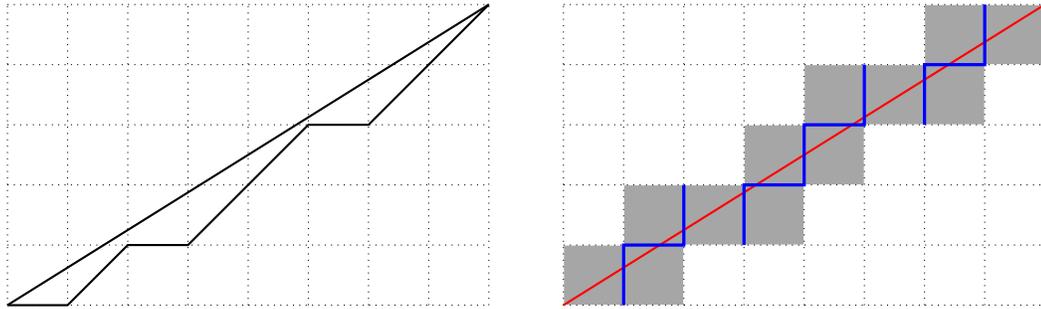


Figure 2.4: Le mot mécanique inférieur de pente $\alpha = 5/8$ est 01011011.

Figure 2.5: La suite d'intersections de pente $\alpha = 5/8$ est *abaababaaba*.

$$y = \alpha x + \rho.$$

Les *suites d'intersections* I (Series, 1985) à pente rationnelle α représentent les intersections entre la demi-droite $y = \alpha x$ et la grille \mathbb{Z}^2 où a est un côté vertical et b un côté horizontal.

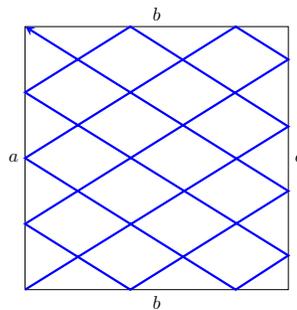


Figure 2.6: Le mot du billard de pente $\alpha = 5/8$ est *abaababaaba*.

Finalement, les *mots de billard* sont définis dans (Borel et Reutenauer, 2005). Ils représentent les rebonds d'une balle sur un carré où les côtés horizontaux sont étiquetés b et les côtés verticaux a (voir figure 2.6). Toutes ces familles de mots sont équivalentes au mot de Christoffel, mais cette démonstration n'est pas présentée dans ce texte.

2.2 Factorisation standard

La *factorisation standard*, introduite par Borel et Laubie dans l'article (Borel et Laubie, 1993), permet de construire récursivement les mots de Christoffel. Elle est définie sur les mots de Christoffel propres, les mots a et b sont les cas de base de la récurrence.

Définition 2. *La factorisation standard du mot de Christoffel propre w est un couple de mots (u, v) tels que $w = uv$ et $u, v \in \mathcal{C}$.*

Exemple 9. *La factorisation standard du mot de Christoffel $aabaabab$ est $(aab, aabab)$.*

L'existence et l'unicité de cette factorisation sont explicitées par le théorème suivant.

Théorème 3. *(Borel et Laubie, 1993) Un mot de Christoffel propre w a une unique factorisation $w = (u, v)$ où u et v sont des mots de Christoffel.*

Démonstration. Sans perte de généralité, supposons que w est un mot de Christoffel inférieur de pente q/p . Soit ℓ le chemin discret représenté par w et $[AB]$ le segment discrétisé par w .

Existence : soit $C = (s, t)$ un point entier de ℓ à distance minimale de $[AB]$. Le triangle ABC ne contient aucun point entier autre que A , B et C , car il est à l'intérieur du polygone formé par ℓ et $[AB]$ (voir la figure 2.7). Ainsi, les segments $[AC]$ et $[CB]$ ne contiennent aucun point entier à l'exception de leurs extrémités. On souhaite démontrer que $\text{PGCD}(s, t) = 1$.

Supposons que $\text{PGCD}(s, t) = d > 1$. Le segment $[AC]$ appartient à la droite $y = \frac{t}{s}x = \frac{dm}{dn}x$, puisque $d|t$ et $d|s$. D'où le point $(n, m) \in [AC]$, contradiction. Par conséquent, les entiers s et t sont premiers entre eux, de même que les entiers $p - s$ et $q - t$ par un raisonnement similaire.

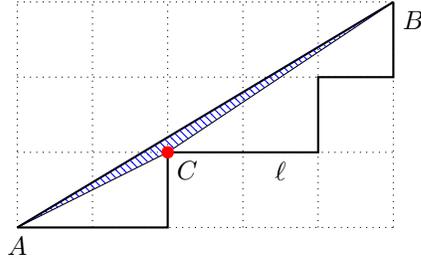


Figure 2.7: Le triangle formé par les points ABC est contenu dans le polygone entre $[AB]$ et ℓ .

De plus, le polygône formé par $[AC]$ et le chemin discret entre A et C ne contient aucun point entier intérieur, car il est contenu dans le polygone formé par $[AB]$ et ℓ . De même, le polygone formé par $[CB]$ et le chemin discret entre B et C n'en contient pas. Donc, le mot w est produit des mots de Christoffel inférieurs de pente t/s et $q - t/p - s$.

Unicité : supposons que la factorisation ne soit pas unique, alors il existe deux points distincts M et M' engendrant une factorisation de w . Ainsi, nous avons $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 1 = \det(\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{AB})$. En prenant la différence, on obtient que $\det(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{AB}) = 0$. Par conséquent, la droite (MM') est parallèle à la droite (AB) . De plus, le segment $\overline{MM'}$ est plus court que le segment \overline{AB} , car les points M et M' sont situés en dessous de la diagonale du rectangle formé par A et B . Donc, $[AB]$ contient au moins un point entier, ce qui est impossible. Par conséquent, la factorisation standard est unique. ■

Grâce au lemme 11, on déduit qu'un mot de Christoffel inférieur se factorise en deux mots de Christoffel inférieurs. Inversement, la factorisation standard d'un mot de Christoffel supérieur est composée de ce même type de mots. À partir de la factorisation standard, il est possible de donner une première caractérisation non géométrique des mots de Christoffel.

Théorème 4. (Borel et Laubie, 1993) Soit un mot $w \in \{a, b\}^*$. C'est un mot de Christoffel inférieur si et seulement s'il existe deux mots $u, v \in \mathcal{C}_{\text{inf}}$ tels que $w = uv$ et $\det \begin{pmatrix} |u|_a & |v|_a \\ |u|_b & |v|_b \end{pmatrix} = 1$.

La condition que le déterminant soit égal à 1 est nécessaire, car le produit des mots de Christoffel aab et abb qui est $aababb$ n'est pas un mot de Christoffel.

Démonstration. Soit w un mot de Christoffel inférieur de pente q/p . Il existe deux mots $u, v \in \mathcal{C}$ tels que $w = uv$ par le théorème 3. Soit A, B, C trois points entiers tels que $B = A + (p, q)$ et $C = A + (x, y)$. Ces points sont les extrémités des mots de Christoffel w, u et v (voir figure 2.8). Les segments $[AB], [AC]$ et $[BC]$ forment un triangle ayant trois sommets entiers, mais qui ne contient aucun point entier d'où $\det(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 1$.

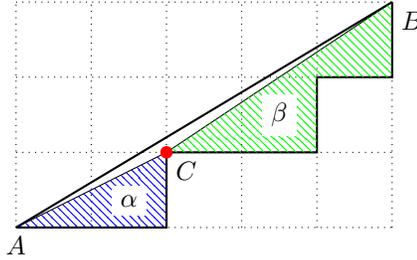


Figure 2.8: Factorisation standard

Soit $u, v \in \mathcal{C}$ tel que $w = uv$ et $\det \begin{pmatrix} |u|_a & |v|_a \\ |u|_b & |v|_b \end{pmatrix} = 1$. Le mot w code un chemin situé en dessous du segment entre A et $A + (|u|_a + |v|_a, |u|_b + |v|_b)$ comme l'illustre la figure 2.8. Puisque u et v sont des mots de Christoffel, les régions α et β de cette figure ne contiennent pas de point entier intérieur. De plus, le triangle ABC ne contient aucun point entier intérieur, car $\det \begin{pmatrix} |u|_a & |v|_a \\ |u|_b & |v|_b \end{pmatrix} = 1$. Par conséquent, le polygone délimité par le segment entre A et $A + (|u|_a + |v|_a, |u|_b +$

$|v|_b$) et la concaténation des mots de Christoffel u et v ne contient aucun point entier intérieur. Donc, w est un mot de Christoffel. Si w est un mot de Christoffel supérieur, la preuve est analogue. ■

Une *paire de Christoffel* (u, v) est une paire de mots satisfaisant les critères du théorème 4. L'*arbre de Christoffel* est un arbre binaire infini dont les sommets sont les paires de Christoffel. La racine de cet arbre est la paire (a, b) . La règle récursive de construction de l'arbre est donnée par la figure 2.9. L'arbre contient seulement les paires de Christoffel composées de mots de Christoffel inférieurs. Le résultat suivant assure que l'arbre est bien défini.

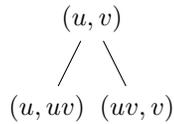


Figure 2.9: Règle de construction de l'arbre de Christoffel

Corollaire 1. *Soit w un mot de Christoffel inférieur propre et (u, v) sa factorisation standard. Les mots $u(uv)$ et $(uv)v$ sont des mots de Christoffel inférieur avec la factorisation standard correspondante.*

Démonstration. Par définition, les mots u , v et uv sont des mots de Christoffel, alors il suffit de prouver que

$$\det \begin{pmatrix} |u|_a & |uv|_a \\ |u|_b & |uv|_b \end{pmatrix} = 1 \text{ et } \det \begin{pmatrix} |uv|_a & |v|_a \\ |uv|_b & |v|_b \end{pmatrix} = 1.$$

On a que

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} |u|_a & |uv|_a \\ |u|_b & |uv|_b \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} |u|_a & |u|_a + |v|_a \\ |u|_b & |u|_b + |v|_b \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} |u|_a & |v|_a \\ |u|_b & |v|_b \end{pmatrix} \\ &= 1, \end{aligned}$$

car $uv = w$ est un mot de Christoffel. Le calcul est analogue pour le deuxième cas. Donc, $u(uv)$ et $(uv)v$ sont des mots de Christoffel avec la factorisation correspondante. ■

La figure 2.10 présente les premiers étages de l'arbre de Christoffel. Évidemment, si une paire de Christoffel apparaît dans l'arbre, uv est un mot de Christoffel inférieur. Remarque : l'arbre contient exactement une fois toutes les paires de Christoffel inférieurs. Une façon de démontrer cet énoncé est de prouver qu'en remplaçant les mots de Christoffel par leur pente, on obtient l'arbre de Stern-Brocot.

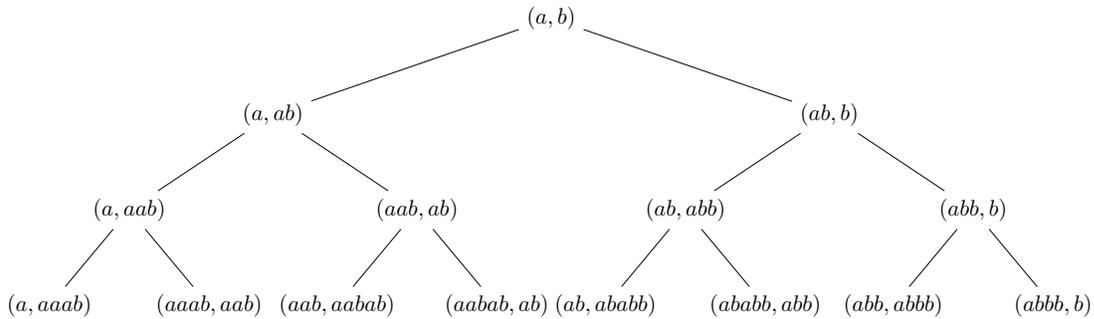


Figure 2.10: Les premiers étages de l'arbre de Christoffel.

Corollaire 2. Soit w un mot de Christoffel de longueur au moins 3 et (u, v) sa factorisation standard. Le mot u est un préfixe de v ou bien le mot v est un suffixe de u .

Démonstration. Soit $w \in \mathcal{C}_{\text{inf}}$ avec $|w| \geq 3$ et (u, v) sa factorisation standard. On a que (u, v) n'est pas la racine de l'arbre, car $|w| \geq 3$. Par conséquent, il existe un sommet dans l'arbre (u', v') qui est le parent du sommet (u, v) . Alors par le corollaire 1, on a que $(u, v) = (u', u'v')$ ou $(u, v) = (u'v', v')$. Dans le premier cas, on déduit que u est un préfixe de v tandis que dans le second cas, on a que v est un préfixe de u . Si $w \in \mathcal{C}^{\text{sup}}$, on a que $R(w) \in \mathcal{C}_{\text{inf}}$. Donc, u est un préfixe de v ou v est un suffixe de u . ■

De plus, tous les mots de Christoffel inférieurs apparaissent comme produit de mots de Christoffel inférieurs exactement une fois dans l'arbre, car la factorisation standard est unique.

2.3 Factorisation palindromique

Il existe une autre factorisation définie sur les mots de Christoffel. Cette deuxième factorisation est appelée *factorisation palindromique*.

Théorème 5. (Chuan, 1997) *Tout mot de Christoffel w a une unique factorisation $w = v'u'$ avec $v', u' \in \text{PAL}$. En plus, si (xm_1y, xm_2y) est la factorisation standard de w , alors $v' = xm_2x$ et $u' = ym_2y$.*

La preuve de l'unicité est inspirée de la variante de ce résultat faite par de Luca et Mignosi dans (de Luca et Mignosi, 1994).

Démonstration. Soit w un mot de Christoffel. La factorisation standard de w est (xm_1y, xm_2y) avec $m_1, m_2 \in \text{PAL}$ et $x \neq y \in \{a, b\}$. Par conséquent,

$$w = xmy = xm_1yxm_2y = xm_2xym_1y,$$

car $m_1xym_2 = m$ est un palindrome par le lemme 11. En posant, $u' = ym_1y$ et $v' = xm_2x$ on obtient la factorisation palindromique de w .

Supposons que la factorisation ne soit pas unique, alors il existe quatre palindromes u, v, s et t tel que $w = uv = st$. Sans perte de généralité, supposons que $|u| > |s|$, alors $u = sh$ et $hv = t$, avec $h \in A^+$. Puisque u, v, s et t sont des palindromes, on a que

$$\begin{aligned} R(uv) = R(st) &\Rightarrow vu = ts \\ &\Rightarrow vsh = hvs. \end{aligned}$$

Par le lemme 1, on a que h et vs sont des puissances d'un même mot. Alors, il existe un mot $u \in A^+$ tel que $h = u^r$, $vs = u^k$ avec $r, k > 0$. Par conséquent, $vu = vsh = u^{r+k}$. Donc, vu n'est pas primitif. De plus, les mots vu et uv sont conjugués, contradiction avec le lemme 12. Donc, la factorisation est unique. ■

Exemple 10. *La factorisation palindromique du mot de Christoffel $aabaababaabab$ est $(aabaa)(babaabab)$.*

La factorisation palindromique a aussi une interprétation géométrique, elle divise le chemin discret représenté par le mot de Christoffel en son point le plus éloigné du segment de droite codé par le mot (voir image 2.11).

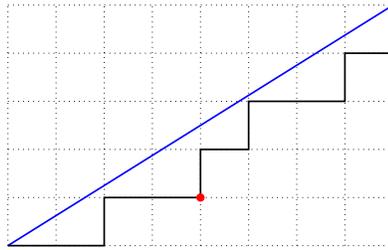


Figure 2.11: Le point rouge correspond à la factorisation palindromique du mot de Christoffel de pente $\frac{5}{8}$.

Corollaire 3. *Soit w un mot de Christoffel, (u, v) sa factorisation standard et (v', u') sa factorisation palindromique. On a alors que $|u| = |u'|$ et $|v| = |v'|$.*

Démonstration. Par les théorèmes 3 et 5, on a que $u = xm_1y$, $v = xm_2y$, $v' = xm_2x$ et $u' = ym_2y$ avec $m_1, m_2 \in \text{PAL}$ et $x \neq y \in \{a, b\}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} |u| &= |xm_1y| = |ym_1y| = |u'| \\ |v| &= |xm_2y| = |xm_2x| = |v'|. \end{aligned}$$

■

2.4 Morphisme de Christoffel

Un endomorphisme f sur le monoïde libre A^* est défini par une paire (u, v) telle que $f(a) = u$ et $f(b) = v$. Définissons cinq endomorphismes qui sont particulièrement intéressants pour l'étude des mots de Christoffel :

$$\begin{aligned} G &= (a, ab) & D &= (ba, b) \\ \tilde{G} &= (a, ba) & \tilde{D} &= (ab, b) \\ E &= (b, a) \end{aligned}$$

Un morphisme de Christoffel est un endomorphisme sur A^* qui envoie un mot de Christoffel sur un conjugué d'un mot de Christoffel. Dans cette section, on souhaite prouver que les morphismes G , D , \tilde{G} et \tilde{D} sont des morphismes de Christoffel.

Lemme 13. *Les morphismes G et \tilde{D} envoient un mot de Christoffel inférieur sur un autre mot de Christoffel inférieur.*

Démonstration. Procédons par récurrence sur la longueur d'un mot de Christoffel inférieur w . Si $|w| = 1$, alors $w = a$ ou $w = b$. Si $w = a$, alors $G(a) = a$ et $\tilde{D}(a) = ab$ qui sont bel et bien des mots de Christoffel. Si $w = b$, alors $G(b) = ab$ et $\tilde{D}(b) = b$ qui sont aussi des mots de Christoffel. Supposons que les mots $G(w)$ et $\tilde{D}(w)$ sont des mots de Christoffel si $|w| \leq n$. Soit w un mot de Christoffel de

longueur $n + 1$. Par le théorème 4, il existe deux mots de Christoffel inférieurs u et v tel que $w = uv$ et

$$\det \begin{pmatrix} |u|_a & |v|_a \\ |u|_b & |v|_b \end{pmatrix} = 1.$$

Par l'hypothèse de récurrence, les mots $G(u)$, $G(v)$, $\tilde{D}(u)$ et $\tilde{D}(v)$ sont tous des mots de Christoffel inférieurs. De plus, $G(w) = G(u)G(v)$ et $\tilde{D}(w) = \tilde{D}(u)\tilde{D}(v)$, car G et \tilde{D} sont des morphismes, alors il suffit de prouver que $\det(G(w)) = 1$. On a que

$$\begin{aligned} \det(G(w)) &= \det \begin{pmatrix} |G(u)|_a & |G(v)|_a \\ |G(u)|_b & |G(v)|_b \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} |u|_a + |u|_b & |v|_a + |v|_b \\ |u|_b & |v|_b \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} |u|_a & |v|_a \\ |u|_b & |v|_b \end{pmatrix} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Un calcul analogue démontre que $\det(\tilde{D}(w)) = 1$. Donc, $G(w)$ et $\tilde{D}(w)$ sont des mots de Christoffel inférieurs. ■

Les morphismes G et \tilde{D} ont une interprétation géométrique, ils envoient un mot de Christoffel inférieur de pente q/p sur les mots de Christoffel inférieurs de pentes $p + q/p$ et $q/p + q$ respectivement.

Lemme 14. *Pour tout mot $w \in A^*$, il existe un mot $u \in A^*$ tel que $G(w) = au$ et $\tilde{G}(w) = ua$. De même, il existe un mot $v \in A^*$ tel que $D(w) = bv$ et $\tilde{D}(w) = vb$.*

Démonstration. Procédons par récurrence sur la longueur du mot w . Si $|w| = 1$, alors $w = a$ ou bien $w = b$. Par conséquent, $G(a) = a = \tilde{G}(a)$ avec $u = \varepsilon$, sinon

$G(b) = ab$ et $\tilde{G}(b) = ba$ avec $u = b$. Supposons qu'il existe un mot $u \in A^*$ tel que $G(w) = au$ et $\tilde{G}(w) = ua$ si $|w| \leq n$.

Soit w un mot de longueur $n + 1$, il y a deux cas possibles : soit $w = aw'$ ou $w = bw'$. Si $w = aw'$, alors par l'hypothèse de récurrence, il existe un mot u' tel que $G(w') = au'$ et $\tilde{G}(w') = u'a$. Par conséquent, $G(w) = G(a)G(w') = aau'$ et $\tilde{G}(w) = \tilde{G}(a)\tilde{G}(w') = au'a$. Donc, $u = au'$. Si $w = bw'$, alors par l'hypothèse de récurrence, il existe un mot u' tel que $G(w') = bu'$ et $\tilde{G}(w') = u'b$. Par conséquent, $G(w) = G(b)G(w') = abau'$ et $\tilde{G}(w) = b\tilde{G}(w') = bau'a$. Donc, $u = bau'$. La démonstration pour la deuxième assertion est analogue. ■

Corollaire 4. *Les morphismes G, D, \tilde{G} et \tilde{D} sont des morphismes de Christoffel.*

Démonstration. Il suffit de démontrer que les morphismes envoient un mot de Christoffel inférieur sur un conjugué d'un mot de Christoffel. Soit w un mot de Christoffel inférieur. Par le lemme 13, on a que $G(w)$ et $\tilde{D}(w)$ sont des mots de Christoffel. Donc, G et \tilde{D} sont des morphismes de Christoffel.

Démontrons que D est un morphisme de Christoffel, la démonstration pour \tilde{G} est similaire. Il existe un mot $u \in A^*$ tel que $D(w) = bu$ et $\tilde{D}(w) = ub$, par le lemme 14. Par conséquent, les mots $D(w)$ et $\tilde{D}(w)$ sont conjugués. Comme $\tilde{D}(w)$ est un mot de Christoffel, $D(w)$ est un conjugué d'un mot de Christoffel. Donc, D est un morphisme de Christoffel. ■

Le morphisme E est aussi un morphisme de Christoffel. Ce morphisme correspond à une réflexion d'un mot de Christoffel par l'axe $y = x$, voir la figure 2.12.

2.5 Palindromes, périodes et conjugués

Dans les années 1990, plusieurs mathématiciens dont de Luca, Mignosi, Berstel, Borel et Laubie ont étudié les propriétés combinatoires des mots de Christoffel.

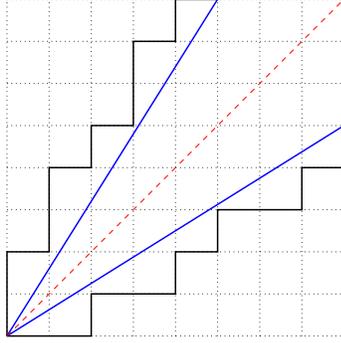


Figure 2.12: Interprétation géométrique du morphisme E sur un mot de Christoffel.

fel. Le théorème suivant regroupe quatre caractérisations des mots de Christoffel considérées par ces auteurs. Avant de démontrer le théorème, présentons quelques résultats utiles pour sa démonstration.

Lemme 15. (de Luca, 1997b) Soit $w \in A^*$. Si $w = PxyQ = QxyP$ avec $P, Q \in \text{PAL}$, $x \neq y$ et $|P| < |Q|$, alors Q est le plus long palindrome suffixe et préfixe propre de w .

Démonstration. Soit $w = PxyQ = QyxP$ avec $P, Q \in \text{PAL}$ et $|P| < |Q|$. Procédons par l'absurde, supposons que Q' soit un palindrome suffixe de w tel que $|Q'| > |Q|$. On a alors que w a la période $p' = |w| - |Q'| < p$ par le lemme 4. On a que

$$|w| = p + q - 2 \geq p' + q - 1 \geq p' + q - d$$

avec $d = \text{PGCD}(p', q)$, car $p \geq p' + 1$. On a alors que d est une période de w par le théorème 1. De plus, on a que $|w| = p + q - 2 \geq p + p'$, car $q > p$. Par conséquent, w a aussi la période $d' = \text{PGCD}(p, p')$. De plus, on a que $|w| \geq d + d'$, car $p \geq d$ et $p' \geq d$. Par conséquent, w a la période $\delta = \text{PGCD}(d, d')$. Or, $\delta = 1$ car le $\text{PGCD}(p, q) = 1$. On a alors que w est une puissance d'une lettre, contradiction avec $x \neq y$. Le plus long suffixe palindromique de w est Q et c'est aussi son plus

long préfixe palindromique, car w est un palindrome. ■

Lemme 16. (de Luca, 1997b) Soit $w \in A^*$ tel que $w = PxyQ = QyxP$ avec $P, Q \in \text{PAL}$ et $x \neq y$ des lettres. Alors, $(wx)^{(+)} = QyxPxyQ$ et $(wy)^{(+)} = PxyQyxP$.

Démonstration. Soit $w = PxyQ = QyxP$. Il faut démontrer que le plus long suffixe palindromique de wx est $s = xPx$. Procédons par l'absurde, supposons que s n'est pas le plus long suffixe palindromique de wx .

Si $|P| > |Q|$, il existe des mots $u, v \in A^*$ tels que $Q = uxv$ et $xvxPx$ soit un palindrome. Par conséquent, il existe un palindrome suffixe de w plus long que P , contradiction avec le lemme 15.

Le cas $|P| = |Q|$ est impossible, car $PxyQ = QyxP$ et $x \neq y$.

Si $|Q| = |P| + 1$, alors on a que $Px = Q = xP$. Par conséquent, $P = x^{|P|}$, $Q = x^{|P|+1}$ et $w = x^{|P|+1}yx^{|P|+1}$. Donc, le plus long suffixe palindromique de wx est $x^{|P|+2} = xPx = s$.

Si $|Q| \geq |P| + 2 = t$ on a que w à la période t par le lemme 4. On en déduit que Q a aussi la période t et $|Q| = kt + r$ avec $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ et $0 < r < t$. De plus, yxP est un suffixe de Q . Par conséquent, $Q = U(yxP)^k$ avec $|U| = r$ et $wx = U(yxP)^{k+1}x$. Soit V le préfixe palindromique de wx plus long que $|xPx|$. Si $|V| < |(yxP)^{k+1}x|$, il existe un entier $h \geq 1$ et $\alpha \in A^*$ tel que $V = x\alpha(yxP)^hx$. On a que V est un palindrome, alors $\alpha(yxP)^h = (Pxy)^h\beta$ avec $\beta = R(\alpha)$. On a alors que $|\alpha| \neq |P|$, sinon $Pxy = Pyx$. Ainsi, $|\alpha| < |P|$ et αx est un suffixe de P . Il existe un mot $\gamma \in A^*$ tel que $P = \gamma\alpha$. On a alors que

$$\begin{aligned} (\gamma\alpha xy)^h\alpha &= \beta(yx\gamma\alpha)^h \Rightarrow \gamma\alpha xy\alpha = \beta yx\gamma\alpha \\ &\Rightarrow x = y, \text{ contradiction.} \end{aligned}$$

Donc, xPx est le plus long suffixe palindromique de wx . Si $|V| > |(yxP)^{k+1}x|$, alors on a que $|V| > 1 + (k+1)p = |Q| + (p-r) + 1$. De plus, $|V| - 2 \geq |Q| + 1$, car $p - r \geq 1$. On a que $V = xV'x$, car V est un palindrome suffixe de wx . Ainsi, V' est un palindrome suffixe de w de longueur $|V'| = |V| - 2 \geq |Q| + 1$. On a que $|V'| < |w|$, alors $|V'|$ est un palindrome suffixe de w plus long que $|Q|$ ce qui contredit le lemme 15. Donc, xPx est le plus long suffixe palindromique de wx . Par conséquent, $(wx)^{(+)} = QyxPxyQ$. La démonstration du cas wy est analogue. ■

Soit w un mot ayant deux périodes p et q tel que $|w| = p+q-2$ et $\text{PGCD}(p, q) = 1$. Dans l'article (de Luca et Mignosi, 1994), l'ensemble des mots de cette forme est appelé PER. Nous utiliserons la même notation afin d'alléger le texte.

Lemme 17. (de Luca et Mignosi, 1994) Soit $w = a_1 \dots a_n \in \text{PER}$. Alors w est un palindrome. De plus, si w n'est pas une puissance d'une lettre, alors $a_{q-1} \neq a_q$.

Démonstration. Soit $w \in \text{PER}$ et p, q les deux périodes de w . On a que

$$\{kp \bmod q \mid 1 \leq k \leq q-1\} = \{1, \dots, q-1\} = Q,$$

car $\text{PGCD}(p, q) = 1$. Soit $x \in \mathbb{N}$ le plus petit entier dans l'intervalle $[1, \dots, q-1]$ tel que $xp \bmod q = q-1$. Sans perte de généralité, supposons que $1 < p < q$. On a alors que $q-1 \not\equiv q-p \bmod q$. Soit $U = \{kp \bmod q \mid 1 \leq k \leq x\}$ et $V = Q - U$. Les deux ensembles sont non vides, car $x < q-1$.

On a que $a_i = a_{i+p}$ pour $1 \leq i \leq q-2 = |w| - p$ et $a_i = a_{i+q}$ pour $1 \leq i \leq p-2 = |w| - q$. On souhaite démontrer que $\forall i, j \in U, a_i = a_j$ et $\forall i, j \in V, a_i = a_j$.

Démontrons que si $hp = i+rq$ et $(h+1)p = j+sq$ avec $1 \leq i \leq q-2, 1 \leq j \leq q-1$ et $1 \leq h \leq q-2$, alors $a_i = a_j$. Si $r \leq s$ et $p = j - i + (s-r)q$, on a alors que $s-r = 0$ ou $s-r = 1$, car $|j-i| \leq q-2$. Si $s-r = 0$, on a alors $j = i+p$ et

$i \leq q-2$. Par conséquent, $a_j = a_{i+p} = a_i$. Si $s-r = 1$, on a alors que $j = i+p-q$, car $i+p \leq q-2+p$ et w a la période q . Par conséquent, $a_j = a_{i+p-q} = a_{i+p} = a_i$. Donc, $\forall i, j \in V$, on a que $a_i = a_j$. De plus, $\forall i, j \in \{kp \bmod q \mid 1 \leq k < x\}$, on a $a_i = a_j$. Il faut démontrer que a_x est égal aux autres lettres indicées par l'ensemble U .

Supposons que $U - \{q-1\} \neq \emptyset$. Soit $i \in U/\{q-1\}$ tel que $(x-1)p = i+tp$ avec $t \geq 0$. On a que $xp = q-1+sq$ pour un certain $s \geq t$. De plus, $i \leq q-2$ ce qui implique que $w_{q-1} = w_i$. Donc, $\forall i, j \in U$, on a que $a_i = a_j$. De plus, on a que w contient au plus 2 lettres différentes, car il a la période q et $a_q = a_{q-p}$. Si w contient seulement une lettre, alors w est un palindrome.

Supposons que w ne soit pas une puissance d'une lettre. Posons que $a_i = x, \forall i \in U$ et $a_i = y, \forall i \in V$ avec $x \neq y$ et $x, y \in A$. On a que $q-1 \in U$ et que $a_{q-1} = x$. On veut démontrer que $a_q = y$. On a que $a_q = a_{q-p}$ et que $(q-1)p = (q-p) + (p-1)q$. On a que $q-p \in V$, car $x < q-1$. Donc, on a que $a_{q-p} = a_q = y$. On a donc que si w n'est pas une puissance d'une lettre, alors $a_{q-1} \neq a_q$.

Démontrons que $a_i = a_{q-i-1}, 1 \leq i \leq q-2$. On a que $hp = i+sp$ et $kp = q-i-1+tp$ avec $1 \leq h, k \leq q-2$ et $s, t \geq 0$. Par conséquent, on a que $(h+k)p = q-1+(s+t)q$. De plus, $xp = q-1+rq$ avec $r \geq 0$ ce qui implique que $(h+k-x)p = (s+t-r)q$. Puisque $\text{PGCD}(p, q) = 1$, on a que $h+k-x = mq$. Par conséquent, $m = 0$ ou $m = 1$. Si $m = 0$, on a que $h+k = x$ ce qui signifie que $h, k \leq x$. Par conséquent, $i, q-i-1 \in U$ et $a_i = a_{q-i-1}$. Si $m = 1$, on suppose que $h \leq x$ et $k > 0$. On a alors que $x+q = h+k \leq x+k$. On en déduit que $q \leq k$ ce qui est impossible, car $k \leq q-1$. Dans le cas, $k \leq x$ et $h > x$ on a une contradiction similaire. Par conséquent, on a que $i, q-i-1 \in U$ ou $i, q-i-1 \in V$. Donc, $a_i = a_{q-i-1}, 1 \leq i \leq q-2$.

En utilisant la période p , on a que

$$a_i = a_{q-i-1} = a_{q-i-1+p} = a_{p+q-2-i+1} = a_{n-i+1}.$$

Donc, $a_i = a_{n-i+1}$, $1 \leq i \leq q-2$. Il suffit de démontrer que $q-2 \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \lfloor \frac{p+q-2}{2} \rfloor$ pour conclure que w est un palindrome. Si $q \geq p+2$, alors $q-2 \geq \frac{p+q-2}{2} \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Si $q = p+1$, on a que $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \frac{(2p+1-2)}{2} = \lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor$. Par conséquent, $q-2 = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Donc, w est un palindrome. ■

Théorème 6. Soit $m \in A^*$. Les énoncés suivants sont équivalents :

- i. Le mot amb est un mot de Christoffel ;
- ii. Le mot amb est un produit de palindromes et m est un palindrome (de Luca et Mignosi, 1994) ;
- iii. Les mots amb et bma sont conjugués (Pirillo, 2001) ;
- iv. Le mot m a deux périodes premières entre elles p et q telles $|m| = p + q - 2$ (de Luca et Mignosi, 1994) ;
- v. Le mot m est un palindrome itéré sur l'alphabet A (de Luca, 1997b) ;

Démonstration. Posons $w = amb$.

(i) \Rightarrow (ii) Si amb est un mot de Christoffel, alors m est un palindrome par le lemme 11. De plus par le théorème 5, le mot amb est un produit de deux palindromes.

(ii) \Rightarrow (iii) Soit amb un mot avec $m \in \text{PAL}$ et $amb = rs$ avec $r, s \in \text{PAL}$. Comme m est un palindrome, on a le mot $amb = R(bma)$. Par conséquent, on a que $bma = R(amb) = R(rs) = R(s)R(r) = sr$, car r et s sont des palindromes. Donc, les mots amb et bma sont conjugués.

(iii) \Rightarrow (iv) Soit m un mot tel que amb et bma sont conjugués. Supposons que $|m| > 1$, car les autres cas se vérifient aisément. Si amb et bma sont conjugués,

alors les mots mba et mab le sont aussi. Alors, il existe deux mots u et v tel que $mab = uv$ et $mba = vu$. Si $|u| = 1$, alors $u = a$ et $m = a^{|m|}$. Le mot m a alors les périodes 1 et $|m| + 1$ et $\text{PGCD}(1, |m| + 1) = 1$ et $|m| = 1 + |m| + 1 - 2$. Si $|v| = 1$, la démonstration est analogue.

Supposons que $|u| \geq 2$ et $|v| \geq 2$. Sans perte de généralité supposons que $|u| \leq |v|$, alors u est un préfixe de v et donc, m a pour périodes $|u|$ et $|v|$. Posons $|u| = p$, $|v| = q$ et $d = \text{PGCD}(p, q)$. Si $d > 1$, alors $|m| = p + q - 2 \geq p + q - d$. Par le théorème 1, m a une période de longueur d , par conséquent, $u = h^{\frac{p}{d}}$ et $v = h^{\frac{q}{d}}$ pour un certain mot $h \in A^+$. C'est une contradiction, car u a le suffixe ba tandis que v a le suffixe ab . Donc, $d = 1$.

(iv) \Rightarrow (v) Soit $m \in \text{PER}$. Démontrons par récurrence sur la longueur de m que ce mot est un palindrome itéré. Si $|m| = 0$, alors $m = \varepsilon = \rho(\varepsilon)$ est un palindrome itéré. Supposons que $m \in \text{PER}$ et $|m| < n$, alors m est un palindrome itéré.

Soit $m \in \text{PER}$ de longueur n . Si m est une puissance d'une lettre, alors $m = x^n$ est un palindrome itéré, car $\rho(x^n) = x^n, \forall x \in A$. Si m n'est pas une puissance d'une lettre, il existe des entiers p et q tel que $|m| = p + q - 2$ et $\text{PGCD}(p, q) = 1$. Par le lemme 17, on a que m est un palindrome. Ainsi, il existe des palindromes P et Q tel que $|P| = q - 2$ et $|Q| = p - 2$ qui sont des suffixes de m par le lemme 4. Par conséquent, $m = PxyQ = QxyP$ avec $x, y \in A$ et $x \neq y$ (par le lemme 17, on a que $a_{q-1} = x \neq a_q = y$). Sans perte de généralité, supposons que $|P| < |Q|$. On a alors que $m = Pxym'yxP$ où $m' \in \text{PAL}$. On a que $Pxym' = Q$ est un palindrome. De plus, on déduit que $Pxym' \in \text{PER}$ par le lemme 4. Ainsi, $Pxym'$ est un palindrome itéré par l'hypothèse de récurrence. Par le lemme 16, on a que

$$m = Pxym'yxP = ((Pxym')y)^{(+)}.$$

Donc, m est un palindrome itéré.

(v) \Rightarrow (i) Supposons que $m = \rho(u)$ est un palindrome itéré. On souhaite montrer par récurrence sur la longueur de u que amb est un mot de Christoffel inférieur. Si $u = 0$, alors $m = \varepsilon$ et $a\varepsilon b = ab$ est un mot de Christoffel. Supposons que $a\rho(u)b$ est un mot de Christoffel inférieur pour tout mot u de longueur au plus n . Soit $u' \in A^*$ un mot de longueur $n + 1$. Il y a deux cas à traiter soit $u' = au$ ou bien $u' = bu$.

Si $u' = au$, alors par la formule de Justin (voir lemme 3)

$$a\rho(u')b = a\rho(au)b = a\mu_a(\rho(u)a)b = \mu_a(a\rho(u)b).$$

De plus, $a\rho(u)b$ est un mot de Christoffel inférieur par l'hypothèse de récurrence et $\mu_a = (a, ab) = G$. Donc, $a\rho(u')b$ est un mot de Christoffel par le lemme 13.

Si $u' = bu$, alors par la formule de Justin (voir lemme 3)

$$a\rho(u')b = a\rho(bu)b = a\mu_b(\rho(u)b)b.$$

De plus, on a que $\mu_b = (ab, b) = D$. Par le lemme 14, il existe un mot v tel que $\tilde{D}(\rho(u)b) = vb$ et $D(\rho(u)b) = bv$. Par conséquent, $v = \tilde{D}(\rho(u))$, car $\tilde{D}(b) = b$ et donc $D(\rho(u)b) = b\tilde{D}(\rho(u))$. Ainsi,

$$a\rho(u')b = aD(\rho(u)b)b = ab\tilde{D}(\rho(u))b = \tilde{D}(a\rho(u)b).$$

Or, $a\rho(u)b$ est un mot de Christoffel inférieur par l'hypothèse de récurrence. Donc, $a\rho(u')b$ est un mot de Christoffel par le lemme 13. ■

L'assertion (iii) signifie qu'un mot de Christoffel et son image miroir sont conjugués c.-à-d. un mot de Christoffel inférieur de pente p/q est conjugué au mot de Christoffel supérieur de même pente.

Corollaire 5. *Tous les préfixes palindromiques de mots centraux sont aussi des mots centraux.*

Démonstration. Les mots de centraux sont des palindromes itérés (voir le théorème 6) et les préfixes palindromiques d'un palindrome itéré sont des palindromes itérés. ■

Corollaire 6. (de Luca, 1997b) *Un mot m est central si et seulement*

$$m = m_1 x y m_2 = m_2 y x m_1$$

avec $m_1, m_2 \in \text{PAL}$ et $x \neq y \in A$.

Démonstration. Si m est un mot central, alors amb est un mot de Christoffel. La factorisation palindromique de amb est (am_1a, bm_2b) avec $m_1, m_2 \in \text{PAL}$ par le théorème 5. Donc, $m = m_1 ab m_2 = m_2 ba m_1$ puisque m est un palindrome.

Si $m = m_1 x y m_2 = m_2 y x m_1$ avec $m_1, m_2 \in \text{PAL}$ et $x \neq y$, on a que m est un palindrome et que le mot $x m_1 x y m_2 y$ est un produit de palindromes. Par conséquent, $x m y$ est un mot de Christoffel (voir théorème 6) et m est un mot central. ■

2.6 Graphe de Cayley

Dans cette section, nous introduisons une autre caractérisation reliant le mot de Christoffel de pente q/p au graphe de Cayley du groupe $\mathbb{Z}/(p+q)\mathbb{Z}$. Cette caractérisation est importante, car c'est la définition originale utilisée par Christoffel (Christoffel, 1875).

Soit p et q deux entiers naturels premiers entre eux. Le *graphe de Cayley* du groupe $\mathbb{Z}/(p+q)\mathbb{Z}$ de générateur q est le graphe orienté $G = (S, A)$ avec $S = \{0, 1, \dots, p+q-1\}$ et $A = \{(qi \bmod n, q(i+1) \bmod n) \mid i \in S\}$. De plus, les arcs de ce graphe sont étiquetés par les lettres suivantes :

- i. a , si $(s, t) \in A$ et $s < t$;
- ii. b , si $(s, t) \in A$ et $s > t$;

Exemple 11. La figure 2.13 représente le graphe de Cayley du groupe $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$.

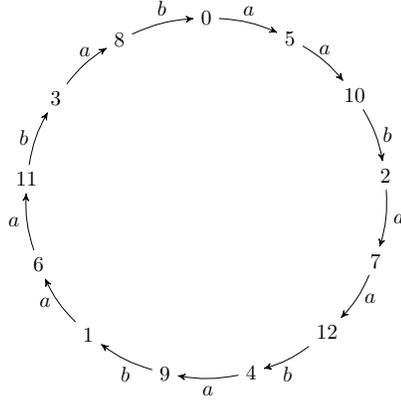


Figure 2.13: Graphe de Cayley du groupe $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$.

Pour tout entier p et q premier entre eux, le graphe de Cayley du groupe $\mathbb{Z}/(p+q)\mathbb{Z}$ est un cycle simple. Le graphe de Cayley est associé à un mot circulaire représenté par les étiquettes du cycle que l'on identifie avec le mot débutant et terminant au sommet 0.

Exemple 12. Le graphe de Cayley de la figure 2.13 est associé au mot $aabaababaabab$.

Théorème 7. Le mot de Christoffel inférieur de pente q/p est équivalent au représentant le graphe de Cayley du groupe $\mathbb{Z}/(p+q)\mathbb{Z}$.

La preuve présentée ci-dessus est présentée dans le livre (Reutenauer, 2016).

Démonstration. Soit w un mot de Christoffel inférieur de pente q/p . Étiquetons tous les points entiers sur le chemin discret w par la distance verticale entre ce point et la diagonale du rectangle de sommets $(0,0)$, $(q,0)$, (p,q) et $(p,0)$ (voir figure 2.14). Toutes les étiquettes sont une fraction i/p pour un certain entier naturel i , car l'équation de la droite soutenant la diagonale est $y = \frac{q}{p}x$. Par

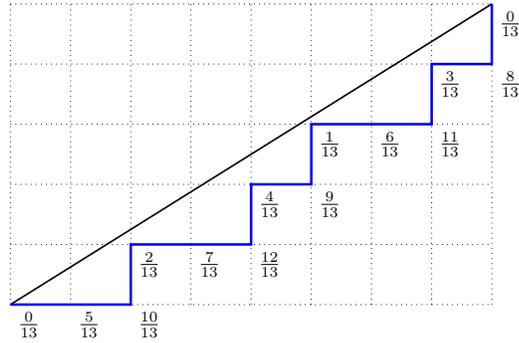


Figure 2.14: Les étiquettes des points sur le chemin de Christoffel de pente $5/8$.

conséquent, si i/p et j/p sont les étiquettes de deux points successifs du chemin discret, alors

$$j = i + q, \text{ si c'est un pas horizontal}$$

$$j = i - q, \text{ autrement.}$$

Soit i/p l'étiquette d'un point. Si $i < p$, alors le pas suivant est horizontal, autrement le chemin croiserait la diagonale. Ainsi, le point suivant a l'étiquette $\frac{i+q}{p}$. Par contre, si $i \geq p$, le pas suivant est vertical, autrement le polygone délimité par le chemin discret et la diagonale contient un point entier intérieur. Par conséquent, le point suivant doit avoir l'étiquette $\frac{i-p}{p}$.

Tous les numérateurs sont distincts sauf le premier et le dernier qui sont égaux à 0. En effet, s'ils ne sont pas tous distincts, alors il y a un segment entier parallèle à la diagonale à l'intérieur du rectangle, ce qui contredit $\text{PGCD}(p, q) = 1$. Ainsi, les numérateurs possibles sont exactement les nombres entiers entre 0 et $p + q - 1$.

Ainsi, nous pouvons remplacer les étiquettes i/p par i . En retirant la dernière étiquette, on obtient l'ensemble des entiers entre 0 et $p + q - 1$. Donc, si i et j sont des étiquettes consécutives, nous avons $j \equiv i + p \pmod{p + q}$ avec $i < j$ si le pas est horizontal et $i > j$ si le pas est vertical. ■

CHAPITRE III

LES MOTS STANDARDS

Après avoir étudié les mots de Christoffel d'un point de vue géométrique et combinatoire, nous allons maintenant mettre en évidence les liens entre les mots de Christoffel et les suites sturmiennes. Les mots standards forment un pont entre les mots de Christoffel et les suites sturmiennes.

3.1 Mots standards et fractions continues

Dans cette section, nous utiliserons l'une des premières définitions des mots de Christoffel introduite par (Smith, 1876). Cette caractérisation qui utilise les mots standards nous permet de faire le lien entre les mots de Christoffel et les suites sturmiennes. Tout d'abord, rappelons brièvement la définition de fractions continues simples.

Une fraction continue simple est une expression, finie ou infinie, de la forme :

$$[a_0, a_1, a_2, \dots] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}$$

avec $a_0 \in \mathbb{Z}$ et $a_i \in \mathbb{N} - \{0\}$ pour $i \geq 1$. Rappelons aussi que le développement en fraction continue d'un nombre réel α est fini si et seulement si α est un nombre rationnel. De plus, le développement en fraction continue d'un nombre rationnel n'est pas unique. En effet, la fraction continue $[a_0, a_1, \dots, a_n] = [a_0, a_1, \dots, a_n - 1, 1]$ pour tout $a_n > 1$.

Soit $[a_0, a_1, \dots, a_n]$ une fraction continue avec $a_0 \geq 0$. À cette fraction continue, on associe un mot s_{n+1} défini récursivement de la façon suivante :

$$s_{-1} = a, \quad s_0 = b, \quad s_{i+1} = s_i^{a_i} s_{i-1}, \quad \forall i \in \{0, \dots, n\}. \quad (3.1)$$

Le mot s_{n+1} est appelé *mot standard* et la fraction continue qui lui est associée est appelé le *mot directeur* de s_{n+1} . Les mots s_1, s_2, \dots, s_n composant un mot standard sont aussi des mots standards. De plus, un mot standard débute par a si $a_0 = 0$ et b autrement. Pour tout $i > 1$, le mot ab est un suffixe de s_i si i est pair et le mot ba est un suffixe si $i > 1$ est impair.

Exemple 13. *Le mot standard associé à la fraction continue $5/8 = [0, 1, 1, 1, 2]$ est $abaababaababa$. La liste ci-dessous est la construction récursive de ce mot standard.*

$$\begin{aligned} s_{-1} &= a \\ s_0 &= b \\ s_1 &= s_0^0 s_{-1} = a \\ s_2 &= s_1^1 s_0 = ab \\ s_3 &= s_2^1 s_1 = aba \\ s_4 &= s_3^1 s_2 = abaab \\ s_5 &= s_4^2 s_3 = abaababaababa \end{aligned}$$

Remarque : un mot de Christoffel n'est pas en général un mot standard. En effet, le mot s_{n+1} de l'exemple 13 débute et termine par la lettre a , alors que la première et la dernière lettre d'un mot de Christoffel sont différentes. Par contre, il est possible de dénifier une bijection entre ces deux ensembles de mots démontrant ainsi que se sont des ensembles équivalents.

Soit $w \in A^*$ un mot. Il existe une unique suite finie d'entiers (h_1, h_2, \dots, h_n) avec $h_1 \geq 0$ et $h_i > 0$ pour $1 \leq i \leq n$ telle que $w = b^{h_1} a^{h_2} b^{h_3} \dots b^{h_n}$ si n est

impair et $w = b^{h_1}a^{h_2}b^{h_3} \dots a^{h_n}$ si n est pair. La suite (h_1, h_2, \dots, h_n) est appelée *représentation entière* du mot w . Si le mot w débute par la lettre a , alors $h_1 = 0$, sinon $h_1 > 0$. De plus, si n est pair, on a que w termine par la lettre a , sinon il termine par la lettre b .

Exemple 14. *La représentation entière du mot $aaaaabaaabb$ est $(0, 5, 1, 3, 2)$.*

Le mot directeur de deux conjugués d'un mot de Christoffel a été décrite par de Luca (de Luca, 1997b) :

Lemme 18. *Soit $w \in A^*$ et (h_1, h_2, \dots, h_n) sa représentation intégrale. Les mots $\rho(w)ab$ et $\rho(w)ba$ sont des mots standards dont le mot directeur est donné dans le tableau 3.1.*

Tableau 3.1: Mot directeur des palindromes itérés.

	$\rho(w)ab$	$\rho(w)ba$
n est impair	$[h_1, h_2, \dots, h_n, 1]$	$[h_1, h_2, \dots, h_{n-1}, h_n + 1]$
n est pair	$[h_1, h_2, \dots, h_{n-1}, h_n + 1]$	$[h_1, h_2, \dots, h_n, 1]$

Démonstration. Démontrons le résultat précédent par récurrence sur la longueur de la représentation intégrale (h_1, h_2, \dots, h_n) de w . Tout d'abord, supposons que $h_1 > 0$, ainsi le mot w débute par la lettre b . Vérifions que l'assertion est vraie dans le cas $n = 1$ et $n = 2$.

Si $n = 1$, on a que $w = b^{h_1}$ ce qui signifie que $\rho(b^{h_1}) = b^{h_1}$. Ainsi $\rho(w)ab = b^{h_1}ab$ et $\rho(w)ba = b^{h_1+1}a$ sont des mots standards dont les mots directeurs sont $[h_1, 1]$ et $[h_1 + 1]$ respectivement. Si $n = 2$, on a que $w = b^{h_1}a^{h_2}$ ce qui signifie que $\rho(b^{h_1}a^{h_2}) = (b^{h_1}a)^{h_2}b^{h_1}$. Par conséquent, le mot $\rho(w)ab = (b^{h_1}a)^{h_2}b^{h_1}ab$ et

$\rho(w)ba = (b^{h_1}a)^{h_2}b^{h_1+1}a$ sont des mots standards dont le mot directeur est $[h_1, h_2 + 1]$ et $[h_1, h_2, 1]$ respectivement.

Supposons que si w a une représentation intégrale strictement plus courte que n , alors $\rho(w)ab$ et $\rho(w)ba$ sont des mots standards dont le mot directeur est donné dans le tableau 3.1.

Soit $w = w_1x^{h_n}$ avec $x \in A$ et $w_1 \in A^*$ dont la représentation intégrale est $(h_1, h_2, \dots, h_{n-1})$. La parité de n , nous permet de déduire la lettre que représente x . Supposons que n est impair, on a alors que $x = b$. Par hypothèse de récurrence, la suite $[h_1, \dots, h_{n-1}, 1]$ est le mot directeur du mot standard s dont $\rho(w_1)$ est le préfixe de longueur $|s| - 2$. Soit la suite de mot s_{-1}, s_0, \dots, s_n avec

$$s_{-1} = a, s_0 = b, s_{k+1} = s_k^{a_k} s_{k-1}, \forall k \in \{0, \dots, n-1\}$$

et $[a_0, a_1, \dots, a_{n-1}] = [h_1, h_2, \dots, h_{n-1}, 1]$. Ainsi, on a que $s = s_n = \rho(w_1)xy$ avec $y = b$. On a que

$$s_{n-1} = Pyx, s_{n-2} = Qxy, s_n = PyxQxy$$

avec $P, Q, PyxQ \in \text{PAL}$, puisque $n \geq 3$. Ainsi, $\rho(w_1) = PyxQ$. Calculons

$$\begin{aligned} \rho(w_1x) &= (PyxQx)^{(+)} \\ &= PyxQxyP, && \text{par le lemme 16} \\ &= PyxPyxQ. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a que $\rho(w_1x)xy = PyxPyxQxy = s_{n-1}^2 s_{n-2}$. En répétant le même argument h_n fois, on en déduit que

$$\rho(w)xy = \rho(w_1x^{h_n})xy = s_{n-1}^{h_n+1} s_{n-2}.$$

Le mot $\rho(w)xy = s_{n-1}^{h_n+1} s_{n-2}$ est un mot standard dont le mot directeur est $[h_1, \dots, h_{n-1}, h_n + 1]$. De plus, le mot

$$\rho(w)yx = (pyx)^{h_n+1} Qyx = (Pyx)^{h_n} QxyPyx = s_{n-1}^{h_n} s_{n-2} s_{n-1} = s_n^1 s_{n-1}$$

est le mot standard associé au mot directeur $[h_1, \dots, h_{n-1}, h_n, 1]$. Donc, si n est impair, on a que $x = b$ ce qui implique que le mot directeur de $\rho(w)ba$ est $[h_1, \dots, h_n + 1]$ tandis que celui du mot $\rho(w)ab$ est $[h_1, \dots, h_n, 1]$. Si n est pair, on a que $x = a$ et le résultat s'obtient à l'aide d'un calcul analogue.

Supposons que $h_1 = 0$ c.-à-d. que la représentation entière de w est $(0, h_2, \dots, h_n)$. Dans ce cas, le mot \bar{w} a pour représentation entière (h_2, \dots, h_n) . On peut alors calculer la suite directrice de \bar{w} par le cas précédent, car $h_2 > 0$. De plus, on a que $\rho(\bar{w})ab = \overline{\rho(w)ba}$ et $\rho(\bar{w})ba = \overline{\rho(w)ab}$ qui sont des mots standards. Notons, h et h' les mots directeurs de $\rho(\bar{w})ab = \overline{\rho(w)ba}$ et $\rho(\bar{w})ba = \overline{\rho(w)ab}$ respectivement. Les mots directeurs de $\rho(w)ab$ et $\rho(w)ba$ sont $[0, h]$ et $[0, h']$. ■

Exemple 15. Soit $w = abab$. La représentation intégrale de w est $(0, 1, 1, 1, 1)$. On a que $\rho(w)ab = abaababaabaab$ et que son mot directeur est $[0, 1, 1, 1, 1, 1]$. Vérifions que $s_6 = \rho(w)ab$:

$$\begin{aligned} s_{-1} &= a \\ s_0 &= b \\ s_1 &= s_0^0 s_{-1} = a \\ s_2 &= s_1 s_0 = ab \\ s_3 &= s_2 s_1 = aba \\ s_4 &= s_3 s_2 = abaab \\ s_5 &= s_4 s_3 = abaababa \\ s_6 &= s_5 s_4 = abaababaabaab. \end{aligned}$$

Les lettres sont à la fois des mots standards et des mots de Christoffel. Démontrons que les deux ensembles sont aussi équivalents pour les mots de longueur > 1 .

Théorème 8. Un mot $w = amb$ est un mot de Christoffel propre si et seulement si mab et mba sont des mots standards.

Démonstration. Si $w = amb$ est un mot de Christoffel, alors m est un palindrome itéré par le théorème 6. Donc, mab et mba sont des mots standards par le lemme 18.

Soit s un mot standard avec $|s| > 1$ et d son mot directeur. Démontrons par récurrence sur la longueur de d que xy est un mot de Christoffel. Si $|d| = 1$, on a que $d = [k]$ avec $k \geq 1$. Par conséquent, $s = a^k b$. De plus, $aa^{k-1}b$ est un mot de Christoffel. Si $|d| = 2$, il y a deux cas possibles. Si $d = [0, a_2]$, on a que $s = a^{a_2} b$ et $aa^{a_2} b$ est un mot de Christoffel. Si $d = [a_1, a_2]$, on a alors que $s = (a^{a_1} b)^{a_2} a$. Le mot $a(a^{a_1} b)^{a_2-1} a^{a_1} b$ est un produit de palindromes et $(a^{a_1} b)^{a_2-1} a^{a_1}$ est un palindrome. Donc, $a(a^{a_1} b)^{a_2-1} a^{a_1} b$ est un mot de Christoffel par le théorème 6. Supposons que pour tous les mots standards $s = mxy$ dont le mot directeur est plus court de n , on a que xy est un mot de Christoffel.

Soit $s = mxy$ un mot standard et d son mot directeur avec $|d| = n$. Par définition, on a que $s = s_n^{a_n} s_{n-1}$ avec s_n et s_{n-1} des mots standards. Par l'hypothèse de récurrence, on a que $s_n = Ayx$ et $s_{n-1} = Bxy$ avec $A, B \in \text{PAL}$, car xAy et xBy sont des mots de Christoffel. Par conséquent, $s = (Ayx)^{a_n} Bxy = (Ayx)^{a_n-1} AxyBxy$. On en déduit que le mot $w = y(Ayx)^{a_n-1} AxyBx$ est le produit des palindromes $y(Ayx)^{a_n-1} Ay$ et xBx .

Démontrons que $m = (Ayx)^{a_n-1} AxyB$ est un palindrome. On a que $s_n = s_{n-1}^{a_n-1} s_{n-2} = (Bxy)^{a_n-1} Cyx$ avec $C \in \text{PAL}$ par l'hypothèse de récurrence. Puisque $(Bxy)^{a_n-1} C = A$, on a que $(Bxy)^{a_n-1} C$ est un palindrome. De plus, on a que C est un préfixe de B , ainsi $|Bxy|$ est un période de A . Par le lemme 4, on a que le suffixe de longueur $|A| - |Bxy|$ est un palindrome. Par conséquent, $(Bxy)^{a_n-1-1} C$ est un palindrome. Posons que $(Bxy)^{a_n-1-1} C = D$. Si $a_n = 1$, on a que $m = ((Bxy)^{a_n-1} Cyx)^{a_n} B = (Bxy)^{a_n-1} CyxB = BxyDyxB$ est un palindrome. Par récurrence, on obtient que $((Bxy)^{a_n-1} Cyx)^{a_n} B = m$ est un palindrome. Donc, w est un produit de palindromes et m est un palindrome. Ainsi, w est un mot de

Christoffel par le théorème 6. ■

La correspondance entre les mots de Christoffel et les mots standards permet aussi de caractériser les mots de Christoffel à l'aide des suites sturmiennes. Cette définition permet de souligner l'importance des mots de Christoffel dans la construction des suites sturmiennes.

Corollaire 7. *Tout mot standard est un préfixe d'une suite caractéristique.*

Démonstration. Découle naturellement de la définition des suites caractéristiques où $c = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ avec s_n un mot standard. ■

Corollaire 8. *Le mot amb est un mot de Christoffel si et seulement si m est un préfixe palindromique d'une suite caractéristique.*

Démonstration. Si amb est un mot de Christoffel, alors m est un préfixe du mot standard mab par le théorème 8. Donc, m est préfixe d'une suite caractéristique par le corollaire 8. De plus, m est un palindrome par le lemme 11. Donc, m est un préfixe palindromique d'une suite caractéristique.

Inversement, soit m un préfixe palindromique d'une suite caractéristique. Il existe un mot standard suffisamment long $s = cxy$ dont m est un préfixe. Ainsi, m est un préfixe palindromique du mot central c . Donc, m est un mot central par corollaire 5 et amb est un mot de Christoffel. ■

3.2 Facteurs et conjugués

Les propriétés d'équilibre et de fermeture des facteurs et des conjugués des mots de Christoffel permettent de déduire d'autres caractérisations. En plus, on démontre que l'ensemble des mots sturmiens est égal à l'ensemble des facteurs des mots de Christoffel.

Lemme 19. *Tous les mots de Christoffel sont équilibrés.*

Démonstration. Soit amb un mot de Christoffel inférieur. Les mots mab et mba sont des mots standards. Par conséquent, il existe des suites caractéristiques c et c' qui ont pour préfixe les mots standards mab et mba par le corollaire 7. On en déduit que les quatre suites ac , bc , ac' et bc' sont sturmiennes. Donc, leurs préfixes amb et bma sont équilibrés (voir le théorème 2). ■

Le lemme précédent signifie que tous les mots de Christoffel sont des mots sturmiens. En plus, les facteurs des mots de Christoffel sont équilibrés, alors ce sont aussi des mots sturmiens. La réciproque a été démontrée par Chuan (Chuan, 1997) :

Lemme 20. *Un mot w est un facteur d'un mot de Christoffel si et seulement si w est un mot sturmien.*

Démonstration. Soit w un facteur d'un mot de Christoffel. Le mot w est équilibré, car c'est un facteur d'un mot équilibré. Donc, w est un mot sturmien.

Soit w est un mot sturmien. Par définition, w est un facteur d'une suite caractéristique c . Par le corollaire 8, il existe un préfixe palindromique p de c tel que $w \in \text{FACT}(p)$. Puisque p est un mot central, on a que apb est un mot de Christoffel. ■

Corollaire 9. *Tous les conjugués d'un mot de Christoffel sont sturmiens.*

Démonstration. Soit w un mot de Christoffel et (u, v) sa factorisation standard. Les mots uw et uw^2 sont aussi des mots de Christoffel par le corollaire 1. De plus, tous les conjugués de w sont des facteurs du mot w^2 et donc, des facteurs de uw^2 . Par conséquent, tous les conjugués des mots de Christoffel sont des mots sturmiens par le lemme 20. ■

Le théorème précédent stipule que l'ensemble ST est égal à l'ensemble $\text{FACT}(\mathcal{C})$. De plus, les notions de facteurs et de conjugués des mots de Christoffel sont reliés, car un conjugué d'un mot de Christoffel est toujours un facteur d'autres mots de Christoffel.

Dans la section 2.5, nous avons démontré que les mots de Christoffel inférieurs et supérieurs de même pente sont conjugués. Nous allons maintenant démontrer que la classe de conjugaison, de même que l'ensemble des facteurs circulaires d'un mot de Christoffel sont fermés par image miroir.

Lemme 21. *Pour tout mot w , on a que*

$$\sigma(w) = R\sigma^{-1}R(w)$$

Démonstration. Soit $w = a_1a_2 \dots a_n$ un mot quelconque. On a que

$$\begin{aligned} R\sigma_{-1}R(w) &= R\sigma^{-1}R(a_1a_2 \dots a_n) \\ &= R\sigma^{-1}(a_n \dots a_2a_1) \\ &= R(a_1a_n \dots a_2) \\ &= a_2 \dots a_na_1 \\ &= \sigma(w). \end{aligned}$$

■

Lemme 22. *Soit (u, v) une paire de Christoffel. Alors,*

$$\forall i \in \mathbb{Z}, \sigma_i(uv) = R(\sigma_{|v|-i}(uv)).$$

Par conséquent, la classe de conjugaison du mot de Christoffel uv est fermée par image miroir.

Démonstration. Soit $j = |v|$. Démontrons que $uv = R(\sigma_j(uv))$. Si u ou v est un mot de Christoffel non propre, il faut alors vérifier les cas où $u = a$, $u = b$, $v = a$

et $v = b$. Si $u = a$, alors $w = a^{j+1}b$ signifie que $R(\sigma_j(a^{j+1}b)) = a^{n+1}b$. Les autres cas se résolvent similairement. Supposons que u et v soient tous deux des mots de Christoffel propres. Alors, il existe $m_1, m_2 \in \text{PAL}$ et $x, y \in A$ avec $x \neq y$ tel que $u = xm_1y$ et $v = xm_2y$ par le théorème 3. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
R(\sigma_j(uv)) &= R(\sigma_j(xm_1yxm_2y)) \\
&= R(\sigma_j(xm_2xym_1y)), && \text{car } m_1xym_2 \in \text{PAL} \\
&= R(y m_1 y x m_2 x), && \text{car } |xm_2x| = |v| = j \\
&= xm_2xym_1y \\
&= xm_1yxm_2y, && \text{car } m_1xym_2 \in \text{PAL} \\
&= uv.
\end{aligned}$$

Pour toutes les autres valeurs de i , on a que

$$\begin{aligned}
\sigma_i(uv) &= R(\sigma_{-i}(R(uv))), && \text{par le lemme 21} \\
&= R(\sigma_{-i}(R(R(\sigma_j(uv))))), && \text{par le cas précédent} \\
&= R(\sigma_{-i}(\sigma_j(uv))), && \text{car } R^2 = \text{Id} \\
&= R(\sigma_{j-i}(uv)).
\end{aligned}$$

On déduit de cette relation que la classe de conjugaison du mot de Christoffel uv est fermée par image miroir. ■

Corollaire 10. *L'ensemble des facteurs circulaires d'un mot de Christoffel est fermé par image miroir.*

Démonstration. Soit x un facteur circulaire du mot de Christoffel w . Il existe $\sigma_i(w)$ un conjugué de w tel que $x \in \text{FACT}(\sigma_i(w))$. Or, l'image miroir de $\sigma_i(w)$ est aussi un conjugué de w par le lemme 22. Par conséquent, $R(x)$ est aussi un facteur circulaire de w . Donc, l'ensemble des facteurs circulaires d'un mot de Christoffel est fermé par image miroir. ■

3.3 Équilibre

Les propriétés sur l'équilibre des mots de Christoffel et de leurs facteurs présentées dans la section précédente permettent de décrire de nouvelles caractérisations des mots de Christoffel.

Théorème 9. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- i. Le mot amb est un mot de Christoffel inférieur ;*
- ii. Les mots ma et mb sont équilibrés et m est un palindrome ;*
- iii. Les mots ama , amb , bma et bmb sont équilibrés ;*
- iv. Les mots amb et bma sont équilibrés.*

Le théorème précédent est le résumé de plusieurs propositions formulées dans (de Luca et Mignosi, 1994; de Luca, 1997b). La preuve de ce théorème est inspirée de celles présentées dans les articles (Lothaire, 2002; Reutenauer, 2016; de Luca et Mignosi, 1994).

Démonstration. $(i) \Rightarrow (ii)$ Soit amb un mot de Christoffel. Le mot m est un palindrome par le lemme 11. De plus, $mb \in \text{FACT}(amb)$, ainsi mb est équilibré par le lemme 19. De même, $ma \in \text{FACT}(bma)$. De plus, $bma = R(amb)$ est un mot équilibré, car amb est équilibré. Par conséquent, le mot ma est équilibré. Donc, les mots ma et mb sont équilibrés et m est un palindrome.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Supposons que m est un palindrome et que les mots ma et mb sont équilibrés. Par conséquent, les mots $R(ma) = am$ et $R(mb) = bm$ sont aussi équilibrés. Soit xmy un mot tel que $x, y \in A$. On souhaite démontrer que le mot xmy est équilibré. Pour ce faire, considérons u et v deux facteurs sans chevauchement de xmy de mêmes longueurs c.-à-d. $|u| = |v|$. Si $u, v \in \text{FACT}(xm)$ ou si $u, v \in \text{FACT}(my)$, alors on a que $\| |u|_a - |v|_a \| \leq 1$, car les mots ma , mb , am

et bm sont équilibrés. Sans perte de généralité, supposons que $u \in \text{FACT}(xm)$ et $v \in \text{FACT}(my)$. Alors il existe deux mots α et β tels que $u = x\alpha$ et $v = \beta y$ avec $|\alpha| = |\beta|$. Par conséquent, on a que $m = \alpha m_1 = m_2 \beta$. On a que $\alpha = R(\beta)$, car m est un palindrome. Ainsi

$$||u|_x - |v|_x| = ||x\alpha|_x - |\beta y|_x| = ||x\alpha|_x - |R(\alpha)y|_x| = |1 - |y|_x|,$$

car α et $R(\alpha)$ contiennent exactement le même nombre d'occurrences de la lettre x . Si $x = y$, alors $||u|_x - |v|_y| = 0$, sinon $||u|_x - |v|_x| = 1$. Par conséquent, pour tous les facteurs de mêmes longueurs que u et v , la relation $||u|_x - |v|_x| \leq 1$ est satisfaite. Donc, les mots ama , amb , bma et bmb sont équilibrés.

(iii) \Rightarrow (iv) Par hypothèse, les mots amb et bma sont équilibrés.

(iv) \Rightarrow (i) Supposons que amb et bma sont équilibrés. Dans un premier temps, on souhaite démontrer que m est un palindrome, par l'absurde. Supposons que m ne soit pas un palindrome, alors $m = xyp = p'yR(u)$ avec $x \neq y$. Sans perte de généralité, supposons que $x = a$ et $y = b$. Ainsi, on a que

$$||aua|_a - |bR(u)b|_a| = 2 > 1$$

avec $aua, bR(u)b \in \text{FACT}(amb)$ ce qui contredit l'équilibre du mot amb . Donc, m est bel et bien un palindrome.

Soit apb un mot de Christoffel tel que amb soit un facteur circulaire de apb . De plus, le mot bma est un facteur circulaire de apb , car $R(amb) = bma$ et l'ensemble des facteurs est fermé par image miroir par le corollaire 10. Par conséquent, m est un facteur circulaire spécial à gauche de apb . Démontrons que les facteurs circulaires spéciaux à gauche sont des préfixes de p . Le mot apb est primitif par le lemme 12. Ainsi, apb a $k + 1$ facteurs distincts de longueur k pour $0 \leq k < n$ par le lemme 2. Par conséquent, apb a exactement un facteur circulaire spécial à gauche de longueur k pour $0 \leq k < n$. Soit u un préfixe de p , on a que au et

bu sont des facteurs circulaires de apb par le corollaire 10, donc tous les préfixes de p sont des facteurs circulaires spéciaux de apb . Puisqu'il existe un seul facteur circulaire de longueur k qui est spécial, on a que les facteurs circulaires spéciaux sont des préfixes de p . On a alors que m est un préfixe de p . Ainsi, m est un mot central par le corollaire 5. Donc, amb est un mot de Christoffel. ■

Le théorème 2 précise qu'un mot est équilibré si et seulement si ce même mot est sturmien. Par conséquent, le théorème précédent peut-être reformulé en remplaçant la condition « être équilibré » par « être sturmien ».

3.4 Mot de Lyndon

Les mots de Lyndon permettent de définir plusieurs caractérisations des mots de Christoffel. Dans cette section, nous allons démontrer que les mots de Christoffel inférieurs sont tous des mots de Lyndon sur l'alphabet A avec l'ordre $a < b$. Par contre, ce ne sont pas tous les mots de Lyndon qui sont des mots de Christoffel.

Exemple 16. *Le mot $aabb$ est un mot de Lyndon, mais il n'est pas équilibré. Donc, ce n'est pas un mot de Christoffel.*

Ainsi, nous déterminerons quelles sont les conditions suffisantes et nécessaires pour qu'un mot de Lyndon soit aussi un mot de Christoffel.

Théorème 10. *Soit w un mot sur l'alphabet $\{a < b\}$ et $w \notin \{a, b\}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- i. w est un mot de Christoffel inférieur ;*
- ii. w est un mot de Lyndon équilibré (Berstel et de Luca, 1997) ;*
- iii. w est un mot de Lyndon Sturmien (Berstel et de Luca, 1997) ;*
- iv. w est un mot sturmien non périodique qui débute par a et termine par b (Chuan, 1998).*

La démonstration de $(i) \Rightarrow (ii)$ est inspirée de celle présente dans l'article (Berstel et de Luca, 1997) tandis que celle de $(iv) \Rightarrow (i)$ vient de celle des articles (Reutenauer, 2016; Harju et Nowotka, 2004).

Démonstration. $(i) \Rightarrow (ii)$ Soit w un mot de Christoffel inférieur. Par le lemme 19, w est équilibré. Il suffit de démontrer qu'un mot de Christoffel inférieur w est un mot de Lyndon. Par le théorème 6, il existe un palindrome itéré m tel que $w = amb$. Procédons par récurrence sur la longueur m pour démontrer que w est un mot de Lyndon.

Si $|m| = 0$, alors $m = \varepsilon$ et $w = ab$ est un mot de Lyndon. De même, si $|m| = 1$, alors $w = a$ ou $w = b$. Ainsi, le mot $w = aab$ ou $w = abb$ qui sont aussi des mots de Lyndon.

Supposons que m soit un palindrome itéré de longueur $n > 1$. Il existe un palindrome itéré v et une lettre x telle que $m = (vx)^{(+)}$.

Si v est puissance d'une lettre, alors il y a quatre cas qui sont présentés dans le tableau 3.2. La démonstration est terminée, car les mots $a^{|v|+2}b$, $ab^{|v|}ab^{|v|+1}$, $ab^{|v|+2}$ et $a^{|v|+1}ba^{|v|}b$ sont des mots de Lyndon.

Tableau 3.2: Clôture palindromique du mot vx

x	v	$(vx)^{(+)}$	amb
a	$a^{ v }$	$a^{ v }$	$a^{ v +2}b$
a	$b^{ v }$	$b^{ v }ab^{ v }$	$ab^{ v }ab^{ v +1}$
b	$b^{ v }$	$b^{ v +1}$	$ab^{ v +2}$
b	$a^{ v }$	$a^{ v }ba^{ v }$	$a^{ v +1}ba^{ v }b$

Supposons que v n'est pas une puissance d'une lettre c'est-à-dire que $a, b \in$

FACT(v). Le mot v peut être uniquement écrit sous la forme

$$v = PxyQ = QyxP$$

avec $P, Q \in \text{PAL}$, $x, y \in A$ et $x \neq y$, car v est un mot central et par le corollaire 6.

La clôture palindromique du mot vx est alors

$$(vx)^{(+)} = (QyxPx)^{(+)} = QyxPxyQ,$$

par le lemme 16. Par conséquent, on a que $w = amb = aQyxPxyQb$. Supposons que $y = b$, alors $w = aQbaPabQb$. Puisque les mots Q et $PabQ$ sont aussi des palindromes itérés et que $|Q|, |PabQ| < |w|$, on déduit par l'hypothèse de récurrence que $aQb = l_1$ et $aPabQb = l_2$ sont des mots de Lyndon. Donc, $w = l_1l_2$ est un mot de Lyndon, car $l_1 < l_2$.

Supposons que $y = a$, alors $w = aQabPbaQb$. Posons, $l_1 = aQabPb$ et $l_2 = aQb$. Les mots l_1 et l_2 sont des mots de Lyndon par l'hypothèse de récurrence, car Q et $PabQ$ sont aussi des mots centraux. De plus, $l_1 < l_2$, par conséquent, $w = l_1l_2$ est un mot de Lyndon.

(ii) \Rightarrow (iii) Un mot est équilibré si et seulement s'il est sturmien par le théorème 2.

(iii) \Rightarrow (iv) Soit w un mot de Lyndon sturmien, on a que w est non périodique, car tous les mots de Lyndon sont non périodiques.

(iv) \Rightarrow (i) Soit $w \in A^*$ un mot non périodique qui est un facteur d'un certain mot de Christoffel. Démontrons par récurrence sur la longueur de w que c'est un mot de Christoffel. Si $|w| = 1$, $w = a$ ou $w = b$ qui sont des mots de Christoffel. Supposons que tous les mots non périodiques sturmiens de longueur $k < n$ sont des mots de Christoffel. Soit w un mot sturmien non périodique de longueur $n \geq 2$. Puisque le mot w est non périodique, la première et la dernière lettre du mot sont différentes. On a que w débute par la lettre a et termine par la lettre b . Le mot

w est un facteur d'un certain mot de Christoffel c . Il existe un mot de Christoffel inférieur m tel que $H(m) = c$ avec $H = G$ ou $H = \tilde{D}$. Ainsi, il existe un facteur x de m tel que $H(x) = w$, car l'image de G est l'ensemble des mots débutant par la lettre a et n'ayant pas de facteurs de la forme bb et \tilde{D} est celle de l'ensemble des mots terminant par b et n'ayant pas de facteurs de la forme aa . Si x est périodique, alors il y a un préfixe de x qui est aussi un de ses suffixes, ce qui implique que w est périodique. Par conséquent, x n'est pas périodique. De plus, x n'est pas une puissance d'une lettre. Par conséquent, le mot x est plus court que le mot w . Par l'hypothèse de récurrence, x est un mot de Christoffel inférieur. Donc, w est un mot de Christoffel inférieur. ■

Il est aussi possible de caractériser l'ensemble des mots de Christoffel supérieurs en utilisant l'ordre $b < a$.

Corollaire 11. *Les mots de Christoffel sont non périodiques.*

Il y a deux autres caractérisations reliant les mots de Christoffel et les mots de Lyndon.

Lemme 23. *(Reutenauer, 2016) Soit w un mot de Lyndon régulier. Il existe un mot de Lyndon régulier m tel que $w = G(m)$ ou $w = \tilde{D}(m)$.*

Démonstration. Si w est une lettre, alors $w = a = G(a)$ ou $w = b = \tilde{D}(b)$. Supposons que w ne soit pas une lettre, on peut écrire $w = uv$ avec u et v des mots de Lyndon réguliers. Par récurrence, on suppose qu'il existe des mots de Lyndon réguliers x et y tel que u et v sont des images de G et \tilde{D} . Si u et v sont des images du même morphisme, on a que $w = G(x)G(y) = G(xy)$ ou $w = \tilde{D}(x)\tilde{D}(y) = \tilde{D}(xy)$.

Supposons que $u = G(x)$ et $v = \tilde{D}(y)$. Si $a \in \text{FACT}(y)$, on a que $y = a$, $v = \tilde{D}(a) = ab = G(b)$ et $w = G(ub)$ ou bien que $y \neq a$, $|v| \geq 2$ et débute par la lettre

a . Par conséquent, ab est un préfixe propre de $v = \tilde{D}(y)$. Si $a \in \text{FACT}(x)$, on a que $x = a$ et $u = G(a) = a$ ou bien que x a le préfixe aa ou ab . Ainsi, le mot $u = G(x)$ a le préfixe aa et $u < ab$ ce qui signifie que uab est un mot de Lyndon qui est un préfixe propre de w avec $|uab| > |u|$, contradiction. Ainsi, a n'apparaît pas dans x et $x = b$, $u = G(b) = ab = \tilde{D}(a)$. Donc, $w = \tilde{D}(ay)$.

Si $a \notin \text{FACT}(v)$, on a alors que $y = b$ et $v = b$. Ainsi, $w = ub$ et b est le plus long suffixe de w qui est un mot de Lyndon. On a alors que u n'a pas de suffixe qui soit un mot de Lyndon commençant par la lettre a . Ainsi, $|u| = 1$, $u = a$ et $w = ab = G(b)$ ou bien $|u| = 2$, $u = ab$ et $w = abb = \tilde{D}(ab)$.

Supposons que $u = \tilde{D}(x)$ et $v = G(y)$. Si $a \in \text{FACT}(y)$, on a que a est un préfixe de y . De plus, on a que $u = \tilde{D}(x)$ débute par ab ou b . Si v n'est pas une lettre, on a que aa est un préfixe de $v = G(y)$. Ainsi, $v < u < w$ ce qui contredit les propriétés des mots de Lyndon. Donc, $y = a$, $v = a < u$, contradiction. Par conséquent, $a \notin \text{FACT}(v)$. On a alors que $y = b$ et $v = G(b) = ab$. Puisque u est dans l'image de \tilde{D} , u est un produit de ab et b . De plus, u est un mot de Lyndon de longueur au moins 2, alors il ne commence pas par la lettre b . Ainsi, u commence par ab et w a le préfixe propre ab , on a alors que $v < w$, contradiction. Donc, si w est un mot de Lyndon régulier, il existe un mot de Lyndon régulier m tel que $w = G(m)$ ou $w = \tilde{D}(m)$. ■

Théorème 11. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

- i. w est un mot de Christoffel inférieur ;*
- ii. w est un mot de Lyndon régulier (Melançon, 1999) ;*
- iii. w est un mot de Lyndon ayant $n-1$ occurrences de facteurs qui sont des mots de Lyndon propres (Reutenauer, 2015).*

Démonstration. (i) \Rightarrow (ii) Soit $w \in A^*$ un mot de Christoffel inférieur. Si w

est une lettre, on a que w est un mot de Lyndon régulier. Supposons que tous les mots de Christoffel inférieurs de longueur $k < n$ sont des mots de Lyndon réguliers. Soit w un mot de Christoffel de longueur n . Le mot $w = uv$ avec $u, v \in \mathcal{C}$ par le théorème 3. On a que v et u sont des mots de Lyndon par le théorème 10. Il faut démontrer que v est le plus long suffixe de w qui soit un mot de Lyndon. Supposons que v' soit un suffixe de w qui est un mot de Lyndon tel que $|v'| > |v|$. On a que $w = lv'$ avec $l, v' \in \mathcal{L}$. Les mots l, v' sont équilibrés, alors $l, v' \in \mathcal{C}$ par le théorème 10. Ce qui contredit l'unicité de la factorisation standard des mots de Christoffel. Donc, v est le plus long suffixe de w qui est un mot de Lyndon. De même, u est le plus long préfixe de w qui est un mot de Lyndon. Par l'hypothèse de récurrence, on a que u et v des mots de Lyndon réguliers. Donc, w est un mot de Lyndon régulier.

(ii) \Rightarrow (iii) La démonstration se fait par récurrence sur la longueur de w . Si $|w| = 1$, on a que $w = a$ ou $w = b$ et alors le nombre d'occurrences de facteurs propres qui soient des mots de Lyndon est bien $n - 1 = 0$. Supposons que $|w| \leq n$ est un mot de Lyndon régulier, alors w a $|w| - 1$ occurrences de facteurs propres qui sont des mots de Lyndon.

Soit w un mot de Lyndon régulier avec $|w| = n + 1$. Par définition, on a que $w = uv$ tel que u et v sont respectivement les plus longs préfixe et suffixe de w qui sont des mots de Lyndon. Par hypothèse de récurrence, on a que u a $|u| - 1$ occurrences de facteurs qui sont des mots de Lyndon propres, de même que v en a $|v| - 1$. Puisque tous les facteurs propres de w qui sont des mots de Lyndon sont des facteurs de u ou de v par le lemme 9, le nombre d'occurrences de facteurs de w qui sont des mots de Lyndon propres est $|u| - 1 + |v| - 1 + 1 = |w| - 1$, car w est aussi un mot de Lyndon propre.

(iii) \Rightarrow (ii) Soit w un mot de Lyndon ayant $n - 1$ occurrences de facteurs qui

sont des mots de Lyndon propres. Procédons par récurrence pour démontrer que w est un mot de Lyndon régulier. Si $|w| < 3$, on a que $w = a$, $w = b$ et $w = ab$ qui sont tous des mots de Lyndon réguliers. Supposons que les mots de Lyndon de longueur $k < n$ ayant $k - 1$ occurrences de facteurs qui sont des mots de Lyndon propres sont des mots de Lyndon réguliers.

Supposons que w est un mot de Lyndon propre de longueur n ayant $n - 1$ occurrences de facteur qui sont des mots de Lyndon propres. Supposons que la factorisation à droite et à gauche de w ne coïncident pas, alors $w = uv = u'v'$ avec $u, v, u', v' \in \mathcal{L}$, $u \neq u'$ et $v \neq v'$. Sans perte de généralité, supposons que u' est le plus long de ces mots. On a que $v' \neq u$ et $u' \neq v$, car w est un mot non périodique c.-à-d. sans bord. De plus, tout mot de Lyndon propre w a au moins une factorisation (u, v) où u et v sont des mots de Lyndon. Ainsi, tous les mots de Lyndon de longueurs n ont au moins $n - 1$ occurrences de facteurs qui sont des mots de Lyndon propres. Par conséquent, u a au moins $|u| - 1$ occurrences de facteurs qui sont des mots de Lyndon propres et v en a au moins $|v| - 1$. De plus, u' n'apparaît pas dans cette liste de facteurs, car $|u'| > |u|$ et u' est un mot de Lyndon propre par hypothèse. Ainsi, nous avons $1 + 1 + |u| - 1 + |v| - 1$ occurrences de facteurs de w qui sont des mots de Lyndon propres, ce qui contredit l'hypothèse. Par conséquent, les deux factorisations de w coïncident et $w = uv$. De plus, u et v sont des mots de Lyndon réguliers par l'hypothèse de récurrence. Donc, w est un mot de Lyndon régulier.

(ii) \Rightarrow (i) Supposons que w soit un mot de Lyndon régulier. Par le lemme 23, w est de la forme $G(m)$ ou $\tilde{D}(m)$ pour un certain mot de Lyndon régulier. Si w est une lettre, w est un mot de Christoffel inférieur. Supposons qu'un mot de Lyndon régulier de longueur $k < n$ est un mot de Christoffel. Soit w un mot de Lyndon régulier de longueur $n > 1$. Démontrons que m est plus court que w . Si $G(m) = w$, alors $m \neq a$, autrement $w = a$. De plus, m n'est pas une puissance de a , car un

mot de Lyndon est primitif. Ainsi, m contient la lettre b et donc m est plus court que w . Similairement, on démontre que si $w = \tilde{D}(m)$, alors m est plus court que w . Par l'hypothèse de récurrence, m est un mot de Christoffel inférieur. Donc, w est un mot de Christoffel inférieur par le lemme 13. ■

Exemple 17. *Les facteurs du mot $aabaababaabab$ étant des mots de Lyndon propres sont $aabaababaabab, aabaabab, aab, ab, aabab, aab, ab, ab, aabab, aab, ab, ab$.*

CHAPITRE IV

FORME NORMALE ET PÉRIODE

Dans ce chapitre, l'objectif est de présenter et de démontrer une nouvelle caractérisation des conjugués des mots de Christoffel. À partir de celle-ci, on peut définir une fonction donnant la période minimale des conjugués des mots de Christoffel. Les mots de Christoffel sont non périodiques, car ce sont des mots de Lyndon. Par contre, tous leurs conjugués qui ne sont pas eux-mêmes des mots de Christoffel sont périodiques.

4.1 Forme normale

Dans cette section, la forme normale des mots sturmiens qui est une factorisation de ces mots est définie. La *racine fractionnaire* d'un mot est le préfixe de w dont la longueur est égale à sa période minimale. Soit $w, u \in A^*$ avec w un mot sans bord, le mot wu est appelé *extension de Duval* de w si aucun facteur sans bord de w est plus long que w lui-même. La période minimale d'un mot w est notée π_w .

Lemme 24. *(Mignosi et Zamboni, 2002) Toutes les extensions wu d'un mot Sturmien sans bord w ont la période $|w|$.*

La démonstration n'est pas présentée dans ce texte. Ce résultat permet de définir une nouvelle caractérisation des mots sturmiens c'est-à-dire des facteurs des mots de Christoffel qui a été démontré par (de Luca et de Luca, 2006)

Théorème 12. *Un mot non vide est sturmien si et seulement si sa racine fractionnaire est conjuguée à un mot de Christoffel.*

La preuve ci-dessous est similaire à celle de de Luca et De Luca, mais on utilise les propriétés des mots de Christoffel plutôt que celle des suites sturmiennes.

Démonstration. Soit w un mot. Si sa racine fractionnaire r est conjuguée à un mot de Christoffel, on a que $w = r^{\frac{p}{q}}$. Soit x un mot de Christoffel conjugué à r et (u, v) sa factorisation standard. Alors, xv est un mot de Christoffel, de même que $x^n v, \forall n \in \mathbb{N}$ par le corollaire 1. En choisissant $n > 2(\frac{p}{q})$, on a que $w \in \text{FACT}(x^n v)$. Donc, w est un mot sturmien.

Soit s un facteur sans bord de $w \in \text{ST}$ de longueur maximale. Il existe $u, v \in A^*$ tel que $w = usv$. Le mot w est une extension de Duval de s , par la maximalité de s . Puisque $R(s)$ est aussi non périodique, le mot $R(s)R(u) = R(us)$ est une extension de Duval de $R(s)$. Par le lemme 24, les mots sv et $R(us)$ ont tous deux la période $|s|$. Par conséquent, us a aussi la période $|s|$. Par le lemme 5, tous facteurs de us et sv de longueur $|s|$ sont des conjugués de s . De plus, tout facteur de w de longueur $|s|$ est un facteur de us ou bien de sv . Puisque s est un facteur de ces deux mots, on en déduit à partir du lemme 5 que le mot w a la période $|s|$.

De plus, cette période est minimale, car $|s| = \pi_s \leq \pi_w = |s|$. Ainsi, la racine fractionnaire de w est conjuguée à s . Or, s est un mot sturmien non périodique, donc un mot de Christoffel par le théorème 10. Par conséquent, sa racine fractionnaire est conjuguée à un mot de Christoffel. ■

À partir de ce lemme, on construit la forme normale des mots sturmiens, mais aussi une caractérisation de l'ensemble des périodes des mots sturmiens.

Corollaire 12. *(Currie et Saari, 2009) L'ensemble des périodes des facteurs d'un*

mot sturmien est la longueur de tous les mots de Christoffel qui sont des facteurs de ce mot.

Ainsi, la période minimale d'un mot sturmien coïncide avec la longueur de son plus long facteur sans bord. Cette propriété a d'abord été étudiée par Duval qui a, entre autres, donné des familles de mots ne satisfaisant pas cette propriété. Par contre, ce n'est pas toutes les périodes d'un mot sturmien qui ont un motif périodique conjugué à un mot de Christoffel.

Exemple 18. *Le mot abaaba qui est conjugué au mot de Christoffel aaabaab a la période 6, mais aucun de ces facteurs de longueur 6, abaaaab et baaaba, est conjugué à un mot de Christoffel.*

Le lemme suivant définit la forme normale à gauche des mots sturmiens.

Lemme 25. *(Reutenauer, 2015) Tout mot sturmien m qui n'est pas une puissance d'une lettre a une unique factorisation de la forme $sw^n p$ où w un mot de Christoffel dont la factorisation palindromique est (p_1, p_2) , $n \geq 1$, s un suffixe propre de p_2 et p un préfixe propre de w . Un mot de cette forme est un mot sturmien et a $|w|$ comme période minimale.*

Démonstration. Existence : Soit m un mot sturmien qui n'est pas une puissance d'une lettre. Par le théorème 12, il existe un mot de Christoffel w dont la longueur est égale à la période minimale de m et $w \in \text{FACT}(m)$. En choisissant la première occurrence à partir de la gauche, on peut écrire $m = sw^n p$ avec $n \geq 1$. On a alors que s est un suffixe propre de w et p est un préfixe propre de w , car w est un motif périodique de m . Si p_2 est un suffixe de s , alors $s = s_1 p_2$ et $R(w) = p_2 p_1$ est un facteur de m à la gauche de w , contradiction. Par conséquent, s est un suffixe propre de p_2 .

Unicité : Supposons que $m = sw^n p$ avec les conditions du lemme satisfaites. On a que la plus courte période de m est $|w|$ et que les motifs périodiques de longueur $|w|$ du mot m sont les conjugués de w . Alors, il suffit de démontrer que w est un mot de Christoffel de longueur $|w|$. Le seul mot de Christoffel conjugué à w est $R(w)$. Or dans le produit $\cdots p_1 p_2 p_1 p_2 p_1 p_2 \cdots$ les seules occurrences de $R(w) = p_2 p_1$ sont celles visibles, car w est primitif. Puisque s est un suffixe propre de p_2 , il n'y a pas d'occurrence de $R(w)$ dans $sw^n p$ avant la première occurrence de w . Donc, la forme normale est unique.

La dernière affirmation découle du fait que $sw^n p \in \text{FACT}(uw^{n+1})$ qui est un mot de Christoffel. Donc, $sw^n p$ est un mot sturmien. De plus, $sw^n p$ a la période $|w|$ qui est minimale, car w est un mot sans bord. ■

Exemple 19. *La forme normale à gauche d'un mot de Christoffel est le mot de Christoffel lui-même avec $s = \varepsilon$, $p = \varepsilon$ et $n = 1$.*

La forme normale du mot $baabaababaabaa$ est $(b, aabaabab^1, aabaa)$.

De façon similaire, il est possible de définir la *forme normale à droite* en utilisant la première occurrence d'un mot de Christoffel w de longueur égale à la période minimale à partir de la droite. Dans cette situation, on a que p est un préfixe propre de p_1 qui est le préfixe palindromique de w et s un suffixe propre de w .

Exemple 20. *La forme normale à droite du mot $baabaababaabaab$ est $(baabaa, babaabaa^1, \varepsilon)$.*

La forme normale à droite et à gauche ne coïncident pas en général. En effet, les deux coïncident seulement si s est un suffixe propre de p_2 et p est un préfixe propre de p_1 .

Exemple 21. *La forme normale à droite et à gauche du mot $ababaababaaba$ coïncident et elles sont égales à $(a, babaa^2, ba)$.*

Dans la suite, la forme normale à gauche sera simplement désignée par forme normale.

Même si les deux formes normales ne coïncident pas, les deux notions sont symétriques. Soit $sw^n p$ la forme normale d'un mot sturmien avec (p_1, p_2) la factorisation palindromique de w . La forme normale à droite de ce mot est $(s', R(w)^n, p')$ avec $s' = sp_1$ et $p = p_2 p'$ si p n'est pas un préfixe propre de p_1 et $s' = s$ et $p' = p$ autrement. De plus, l'image miroir de la forme normale à gauche du mot m est la forme normale à droite du mot $R(m)$.

4.2 Période des conjugués

Soit w un mot de Christoffel et m l'un de ses conjugués tel que $m \notin \mathcal{C}$. Dans l'article (Reutenauer, 2015), il est démontré que m est à la période $|u|$ ou $|v|$ où (u, v) est la paire de Christoffel de w . Par contre, la période minimale de ce mot n'est pas nécessairement de longueur du mot u ou v .

Exemple 22. *Le mot $aabaabaabaababaabaab = \sigma_5(aabaabaabaabaabab)$ a la période $|v| = 17$, mais aussi la période 14.*

Dans la section suivante, nous allons identifier plusieurs périodes des conjugués des mots de Christoffel afin d'arriver à démontrer une formule donnant la période minimale de tous les conjugués des mots de Christoffel.

Dans la suite du texte, nous désignerons l'ensemble des mots de Christoffel de longueur au moins 3 dont le premier facteur de sa factorisation standard est plus court que le second par $\mathcal{C}_{|u| < |v|}$. Pour étudier les périodes des conjugués d'un mot de Christoffel, nous allons choisir un unique mot de Christoffel pour représenter chacune des classes d'équivalences. Chaque classe contient exactement deux mots de Christoffel soit le mot lui-même et son image miroir. Dans notre cas, le mot qui représentera la classe d'équivalence est celui appartenant à l'ensemble $\mathcal{C}_{|u| < |v|}$.

Lemme 26. Soit $w \in \mathcal{C}_{|u| < |v|}$ et $p = |u|$ et $q = |v|$. Si $w = xy$ avec $|x| = kp + 1$ et $k \in \left\{0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{q}{p} \right\rfloor\right\}$ et r est un préfixe de w de longueur $q - (kp + 1)$, alors le mot yr a une période non triviale de longueur $q - kp$.

Rappelons que $kp + 1 < q + 1 \leq |w|$, car le plus grand commun diviseur de p et q est 1. Par conséquent, $q - (kp + 1) \geq 0$.

Démonstration. Supposons d'abord que u et v sont tous deux des mots de Christoffel propres. On a que le mot w peut être écrit $w = a_1 \dots a_q a_{q+1} \dots a_{|w|}$. De plus, il existe des mots $w_1, w_2 \in \text{PAL}$ et des lettres $x, y \in A$ avec $x \neq y$ tel que $w = xw_1yxw_2y = xw_2xyw_1y$ par le théorème 3.

Démontrons que le mot $yr = a_{kp+2} \dots a_{|w|} a_1 \dots a_{q-(kp+1)}$ est un palindrome pour tout $0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{q}{p} \right\rfloor$. Si $k = 0$, alors $yr = a_2 \dots a_{|w|} a_1 \dots a_{q-1}$ qui est égal au mot $w_2xyw_1yxw_2$. Par conséquent, yr est un palindrome. Si $0 < k \leq \left\lfloor \frac{q}{p} \right\rfloor$, le mot $a_{kp+1} \dots a_{|w|} a_1 \dots a_{|v|-(kp+2)}$ est un facteur du palindrome yr obtenu en enlevant un préfixe et un suffixe de même longueur à yr , donc c'est aussi un palindrome.

Il faut démontrer que le suffixe $s = a_{q+2} \dots a_{|w|} a_1 \dots a_{q-(kp+1)}$ de yr est aussi un palindrome. Si $k = 0$, alors $s = a_{q+2} \dots a_{|w|} a_1 \dots a_{q-1}$. Ainsi, $s = w_1xyw_2$ qui est un palindrome, car c'est un mot central de w . De plus, p et q sont des périodes de s , alors par le lemme 4, les préfixes de longueur $s - kp$ sont des palindromes pour $0 < k \leq \left\lfloor \frac{q}{p} \right\rfloor$. Donc, s est un suffixe de yr qui est un palindrome.

Par conséquent, yr est un palindrome ayant le palindrome suffixe s , alors par le lemme 4

$$|yr| - |s| = 2q - 2kp + p - 2 - (q - kp + p - 2) = q - kp$$

est une période de yr . De plus, la période est non triviale, car $|yr| > q - kp$. Si u est un mot de Christoffel propre, alors $u = a$ et $w = a^k b$ ou bien $u = b$ et $w = b^k a$

et on a les périodes souhaitées. ■

Lemme 27. *Soit $w \in \mathcal{C}_{|u| < |v|}$ et $p = |u|$ et $q = |v|$. Soit $k \in \left\{0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{q}{p} \right\rfloor\right\}$ un entier. Pour tout $i \in \{kp + 1, \dots, q - kp - 1\}$, $\sigma_i(w)$ a la période non triviale $q - kp$.*

Démonstration. Les mots $\sigma_i(w)$ sont exactement les facteurs de longueur $|w|$ du mot yr défini au lemme 26. Puisque le mot yr a une période non triviale $q - kp$, alors ses facteurs de longueur $|w|$, ont aussi la même période qui est non triviale, car $|w| = p + q > q - kp$. ■

Le lemme précédent identifie toutes les périodes des mots de Christoffel qui sont associées à un motif périodique qui est conjugué d'un mot de Christoffel. De plus, les motifs périodiques conjugués à un mot de Christoffel et la forme normale sont reliés. Alors, il est maintenant possible de démontrer certaines propriétés spécifiques à la forme normale des conjugués des mots de Christoffel.

Théorème 13. *Soit $w \in \mathcal{C}_{|u| < |v|}$ où $w = u^t \alpha$. La forme normale des conjugués de w qui ne sont pas des mots de Christoffel est (s, c^n, p) satisfaisant l'une des conditions du tableau 4.1 avec $j \leq \left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor$ et $t = k + j$.*

Tableau 4.1: Forme normale des conjugués des mots de Christoffel.

n	c	ps
1	$u^k \alpha$ ou $R(u^k \alpha)$	u^j ou $R(u^j)$
t	u ou $R(u)$	α ou $R(\alpha)$
$t - 1$	u	$u\alpha$

Démonstration. Soit $w \in \mathcal{C}_{|u| < |v|}$ et (u, v) sa factorisation standard. Posons $l_1 = |u|$ et $l_2 = |v|$. Le mot $\sigma_i(w)$ un conjugué du mot de Christoffel w qui n'est pas un

mot de Christoffel. Ainsi, $i \neq 0$ et $i \neq |v|$ par le lemme 22. Il y a 5 cas à traiter selon la valeur de i .

1. Si $1 \leq i \leq \frac{l_2}{2}$, alors $\sigma_i(w) = s(u^{t-j}\alpha)p$ avec $j - 1 = \left\lceil \frac{i}{l_1} \right\rceil$ comme dans la figure 4.1 : on a que $u = u_1u_2$, $p = u^{j-1}u_1$ et $s = u_2$. Remarquons que si $u_2 = \varepsilon$, alors $u_1 = u$. De plus, le mot $u^{t-j}\alpha$ est un mot de Christoffel dont la factorisation palindromique est notée (r_1, r_2) avec $|r_1| = |u^{t-j-1}\alpha|$ et $|r_2| = l_1$. Le mot s est un facteur propre de u , alors s est un suffixe propre de r_2 . L'entier $j \leq \left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil$, car

$$j = \left\lceil \frac{i}{l_1} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{l_2}{2l_1} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil.$$

Par conséquent, p est un préfixe propre de $u^{t-j}\alpha$, car $\text{PGCD}(l_1, l_2) = 1$. On a que $j - 1 < t - j$ et $u_2 \neq \varepsilon$. Donc, la forme normale $\sigma_i(w)$ est (s, c, p) avec $c = u^{t-j}\alpha$ et $ps = u^j$.

2. Si $\frac{l_2}{2} < i \leq l_2 - 1$, alors $\sigma_i(w) = R(\sigma_{l_2-i}(w))$ par le lemme 22. De plus, $1 \leq l_2 - i < \frac{l_2}{2}$. Ainsi la forme normale de $\sigma_{l_2-i}(w)$ est (s_1, u^{t-j}, p_1) par le cas précédent avec $j = \left\lceil \frac{l_2-i}{l_1} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil$. Par conséquent, la forme normale à droite de $\sigma_i(w)$ est $(s, c, p) = (R(p_1), R(u^{t-j}\alpha), R(s_1))$. Si $R(p_1)$ est un suffixe propre de p_1 , alors la forme normale de $\sigma_i(w)$ est $(s, c, p) = (R(p_1), R(u^{t-j}\alpha), R(s_1))$ et $ps = R(s_1)R(p_1) = R(u^j)$. Sinon, $R(p_1) = p'_1r_1$ puisque $|R(u^{t-j}\alpha)|$ est une période de $\sigma_j(w)$ par le lemme 27. Ainsi, la forme normale de $\sigma_j(w)$ est $(s, c, p) = (p'_1, r_1R(u^{t-j-1}\alpha)r_2, r_1R(s_1)) = (p'_1, u^{t-j}\alpha, r_1R(s_1))$ avec $p'_1 = R(u_1)R(u^{j-2})r_2$ et

$$ps = r_1R(s_1)p'_1 = r_1R(s_1)R(u_1)R(u)^{j-2}r_2 = u^j.$$

Pour les cas subséquents, soit (u'_2, u'_1) la factorisation palindromique de u et (u_1, u_2) sa factorisation standard. Observons alors que $u_2 = \alpha$. De plus, u est un mot de Christoffel et $|u|$ est une période de $\sigma_i(w)$ par le lemme 27.

3. Si $|w| - |\alpha| \leq i \leq |w| - 1$, alors $\alpha = p_1s_1$ comme dans la figure 4.2 (notons que

p_1 peut être le mot vide, mais pas s_1). Évidemment, p_1 est un préfixe propre de w , car $|p_1| < |\alpha| < |u|$. Il y a deux cas à considérer :

- si $|s_1| < |u'_1|$, alors s_1 est un suffixe propre de u'_1 , ainsi la forme normale de $\sigma_i(w)$ est $(s, c^n, p) = (s_1, u^t, p_1)$ avec $n = t$, $c = u$ et $ps = \alpha$.
- Autrement, $|s_1| \geq |u'_1|$. On a alors que s_1 est un préfixe propre de u , car $|s_1| \leq |\alpha| < |u|$. De plus, $|p_1| < |u'_2|$, puisque $|s_1| + |p_1| < |u| = |u'_1| + |u'_2|$. Ainsi, p_1 est un préfixe propre de u'_2 et (s_1, u^t, p_1) est la forme normale à droite de $\sigma_i(w)$. On observe que $s_1 = s'_1 u'_1$ et la forme normale à gauche de $\sigma_i(w)$ est $(s, c^t, p) = (s'_1, R(u)^t, u'_1 p_1)$. On a aussi que $\alpha = u_2$, alors $|\alpha| \geq |s_1| \geq |u'_1| = |u_1|$. Supposons que $|u_1| < |\alpha|$, la factorisation standard de α est (u_1, δ) et sa factorisation palindromique est (δ', u'_1) avec $|\delta'| = |\delta|$ par le corollaire 2. Par conséquent, $\alpha = \delta' u'_1 = p_1 s_1$. Autrement, $|s_1| \geq |u'_1|$, alors p_1 est un préfixe de δ' et $\delta' = p_1 s'_1$. Ainsi, $ps = u'_1 p_1 s'_1 = u'_1 \delta' = R(\alpha)$. Si $|u_1| = |\alpha|$, alors $u_1 = x$, $\alpha = y$ et $\{x, y\} = \{a, b\}$. Ainsi, la forme normale à droite de $\sigma_i(w)$ est $(y, (xy)^t, \varepsilon)$ et la forme normale à gauche de $\sigma_i(w)$ est $(\varepsilon, (yx)^t, y)$ et $ps = y = R(\alpha)$.

4. Si $|v| + 1 \leq i \leq |v| + |\alpha|$, alors $|u| - |\alpha| \leq |s_2| \leq |u| - 1$, car $|s_2| = |w| - i$ comme dans la figure 4.3. De plus, $|s_2| \geq |u'_1|$, car $|u| = |u'_1| + |\alpha|$. L'image miroir de $\sigma_i(w)$ est $\sigma_{|v|-i}(w) = \sigma_{|w|+|v|-i}(w)$ par le lemme 22. Par conséquent, $|w| - |\alpha| \leq |w| + |v| - i \leq |w| - 1$. Ainsi, la forme normale à gauche de $\sigma_{|v|-i}(w)$ est donnée par le troisième cas. Soit (s_1, u^t, p_1) la forme normale à droite ou à gauche de $\sigma_{|v|-i}(w)$. Si $|u'_1| > |\alpha|$, alors s_1 est un préfixe propre de u'_1 , car $|s_1| \leq |\alpha|$. Autrement, $|u'_1| \leq |\alpha|$ et $|s_1|$ peut être plus long que $|u'_1|$. Supposons que $|s_1| \geq |u'_1|$, alors

$$|w| + |v| - i \leq |w| - |u'_1| \Rightarrow |u'_1| + |v| = |w| - |\alpha|,$$

car $|w| = |u| + |v| = |u'_1| + |\alpha| + |v| \Rightarrow |u'_1| + |v| = |w| - |\alpha|$. Par conséquent, la forme normale de $\sigma_i(w)$ est déjà donnée par le troisième cas. Ainsi, il suffit de trouver la forme normale à gauche de $\sigma_i(w)$ dans le cas où s_1 est un préfixe propre de $|u'_1|$.

Dans ce cas, la forme normale à gauche de $\sigma_{|v|-i}$ est (s_1, u^t, p_1) avec $p_1 s_1 = \alpha$. Par conséquent, la forme normale à droite de $\sigma_i(w)$ est $(R(p_1), R(u)^t, R(s_1))$. Le mot p_1 est un préfixe propre de u'_2 , car $|p_1| + |s_1| = |\alpha| = |u_2| = |u'_2|$. Ainsi, $R(p_1)$ est un suffixe propre de $R(u'_2)$. La forme normale à droite et à gauche coïncident. Donc, la forme normale à gauche de $\sigma_i(w)$ est $(s, c^n, p) = (R(p_1), R(u)^t, R(s_1))$ avec $ps = R(s_1)R(p_1) = R(p_1 s_1) = R(\alpha)$.

5. Si $|v| + |\alpha| < i < |w| - |\alpha|$, nous avons que $u = \gamma_1 \gamma_2$ avec $p_1 = \gamma_1$ et $s_1 = \gamma_2 \alpha$ comme dans la figure 4.4 (les mots γ_1 et γ_2 sont différents du mot vide). Ainsi, $|\alpha| < |s_1| < |u| - |\alpha|$, car $|s_1| = |w| - i < |w| - |v| - |\alpha| = |u| - |\alpha|$. De plus, $|u_1| = |u| - |\alpha|$ ce qui implique que $|s_1| < |u_1| < |u'_1|$. On a que $|p_1|$ est un préfixe propre de u , puisque γ_2 n'est pas le mot vide. Par conséquent, la forme normale à gauche de $\sigma_i(w)$ est $(s, c^n, p) = (s_1, u^{t-1}, p_1)$ avec $n = t - 1$, $c = u$ et $ps = u\alpha$. ■

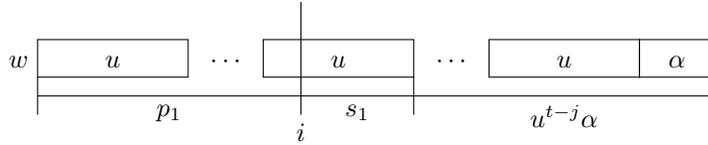


Figure 4.1: Les conjugués $\sigma_i(w)$ pour $1 \leq i \leq \frac{|v|}{2}$.

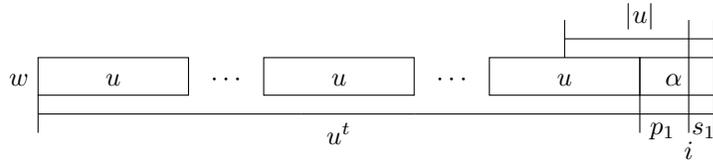


Figure 4.2: Les conjugués $\sigma_i(w)$ pour $|w| - |\alpha| \leq i \leq |w| - 1$.

Connaître la forme normale est équivalent à connaître la période minimale w . Par conséquent, une formule pour la période minimale de tous les conjugués des mots de Christoffel peut être décrite de la façon suivante.

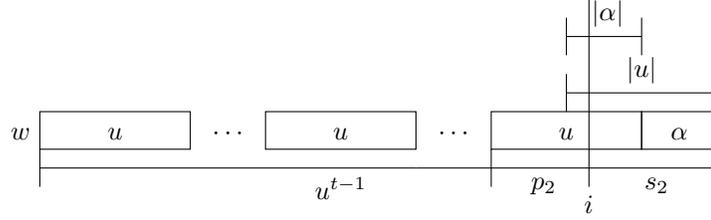


Figure 4.3: Les conjugués $\sigma_i(w)$ pour $|v| + 1 \leq i \leq |v| + |\alpha|$.

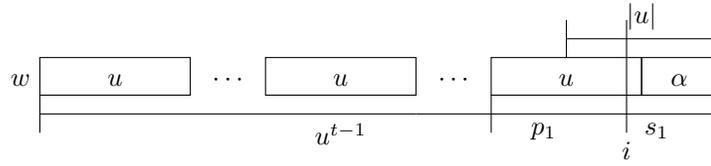


Figure 4.4: Les conjugués $\sigma_i(w)$ pour $|v| + |\alpha| \leq i \leq |w| - |\alpha|$.

Corollaire 13. Soit $w \in \mathcal{C}_{|u| < |v|}$. Posons $|u| = p$ et $|v| = q$. La période minimale de $\sigma_i(w)$ est

$$\pi_{\sigma_i(w)} = \begin{cases} p + q, & \text{si } i \in \{0, q\}, \\ q + (1 - j)p, & \text{si } 1 \leq i \leq \frac{q}{2} \text{ et } j = \left\lceil \frac{i}{p} \right\rceil, \\ q + (1 - j)p, & \text{si } \frac{q}{2} \leq i \leq q - 1 \text{ et } j = \left\lfloor \frac{q-i}{p} \right\rfloor, \\ p, & \text{si } q + 1 \leq i < p + q. \end{cases}$$

Démonstration. On déduit la formule directement du théorème 13. On a que $v = u^{t-1}\alpha$ avec $w = u^t\alpha$. Ainsi, $|v| = (t-1)|u| + |\alpha|$ et $|\alpha| = |v| - (t-1)|u|$. Pour $1 \leq i \leq |v|/2$, la période minimale est $|c|$ avec $c = u^{t-j}\alpha$ et $j = \lceil i/|u| \rceil$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} |c| &= (t-j)p + |\alpha| \\ &= (t-j)p + q - (t-1)p \\ &= p + (1-j)q. \end{aligned}$$

De façon similaire, on vérifie les autres cas de la formule. ■

Les périodes minimales dans l'intervalle $[0, |v|]$ et dans l'intervalle $[|v| + 1, |w|]$ sont symétriques, comme le montre la figure 4.5. Cette symétrie peut être déduite du lemme 22, car la période minimale d'un mot et de son image miroir est égale. De plus, tous les mots dans l'intervalle $[|v| + 1, |w| - 1]$ ont la même période minimale qui est égale à la longueur de u .

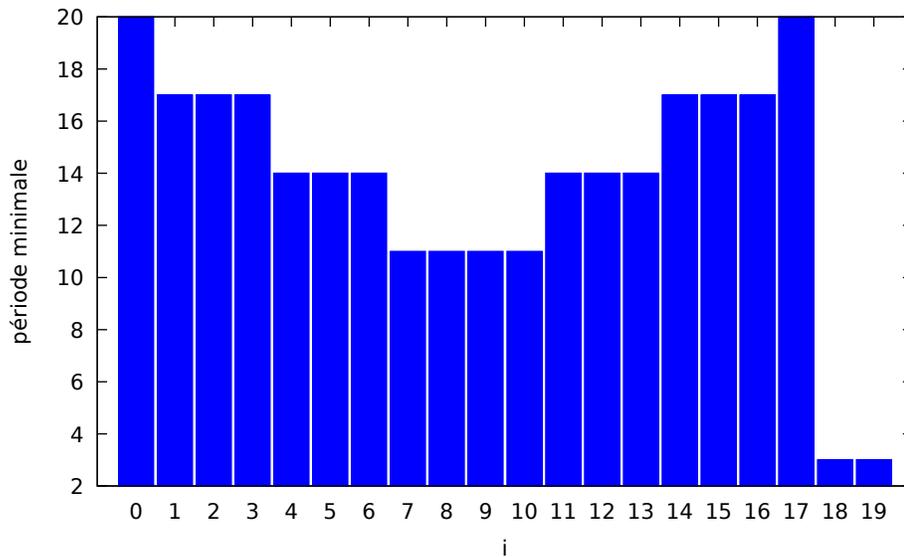


Figure 4.5: Période minimale des conjugués du mot de Christoffel $aabaabaabaabaabab$.

4.3 Caractérisation de la forme normale

Grâce au résultat de la section précédente, il est possible de caractériser la forme normale à gauche des conjugués des mots de Christoffel.

Théorème 14. *Soit (s, c^n, p) la forme normale à gauche d'un mot sturmien m qui n'est pas une puissance d'une lettre. Notons la factorisation standard de c par*

(u, v) . Le mot m est un conjugué d'un mot de Christoffel, sans être un mot de Christoffel, si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

- i. $n = 1$, $ps = u^j$ ou $ps = v^j$ pour un entier $j > 1$;
- ii. $n \geq 1$, $ps \in \{u, v, uvv\}$.

Démonstration. Supposons que m est un conjugué d'un mot de Christoffel w sans être un mot de Christoffel. Soit (x, y) la factorisation standard de w . Supposons que $|x| < |y|$, en remplaçant w par $R(w)$ si nécessaire. Écrivons $w = x^t \alpha$. De plus, α est un mot de Christoffel ainsi qu'un suffixe propre du mot x dont la factorisation standard est (u_1, α) . Alors par le théorème 13, la forme normale de m est :

- i. $n = 1$ et $c = x^i \alpha$, $ps = x^j$ ou bien $c = R(x^i \alpha)$, $ps = R(x^j)$. Dans le premier cas, la factorisation standard de c est $(u, v) = (x, x^{i-1} \alpha)$, par conséquent, $ps = x^j = u^j$. Dans le deuxième cas, la factorisation standard de c est $(u, v) = (R(x^{i-1} \alpha), R(x))$, ainsi $ps = R(x^j) = v^j$. De plus, $j > 0$, autrement $ps = \varepsilon$ et m est un mot de Christoffel. De plus, on peut supposer que $j > 1$, car le cas $j = 1$ est défini dans le deuxième cas.
- ii. $n = t$ et $c = x$, $ps = \alpha$ ou $c = R(x)$ et $ps = R(\alpha)$. Dans le premier cas, la factorisation standard de $x = c$ est (u_1, α) , alors $\alpha = v$ puisque la factorisation standard d'un mot de Christoffel est unique. Par conséquent, $ps = v$. Dans le deuxième cas, la factorisation standard de $c = R(\alpha)$ est $(R(\alpha), R(u_1))$, alors $R(u) = R(\alpha)$ par l'unicité de la factorisation standard. Ainsi, $ps = u$.
- iii. $n = t - 1$ et $c = x$ et $ps = x\alpha$. La factorisation standard de $c = x$ est $(u_1, \alpha) = (u, v)$, car la factorisation standard est unique. Par conséquent, $ps = x\alpha = uvv$.

Supposons que (s, c^n, p) est la forme normale de m avec (u, v) la factorisation standard de c . Les mots u, v et c sont des mots de Christoffel avec (u, v) la paire de Christoffel de c . On souhaite démontrer que (s, c^n, p) est un conjugué d'un mot

de Christoffel sans être un mot de Christoffel. Évidemment, m n'est pas un mot de Christoffel, car $ps \neq \varepsilon$.

Si $n = 1$ et $ps = u^j$, le mot $psc = u^j uv$ est un mot de Christoffel puisque c'est le $j^{\text{ième}}$ enfant de droite de la paire (u, v) est la paire $(u, u^j v)$. De plus, le mot psc est conjugué au mot scp , par conséquent, ce dernier est un conjugué d'un mot de Christoffel. Similairement, si $ps = v^j$ le mot cps est un mot de Christoffel, alors scp est conjugué à un mot de Christoffel.

Si $n \geq 1$ et $ps = v$. On veut prouver que le mot $c^n ps = (uv)^n v$ est un mot de Christoffel. La paire (u, v) est une paire de Christoffel, par conséquent (uv, v) est une paire de Christoffel. En appliquant n fois la règle de droite, on obtient la paire de Christoffel $(uv, (uv)^{n-1} v)$. Le mot $c^n ps = (uv)^n v$ est un mot de Christoffel et $sc^n p$ est l'un de ses conjugués. Donc $sc^n p$ est un conjugué d'un mot de Christoffel. Similairement, il est possible de démontrer que $sc^n p$ est un conjugué d'un mot de Christoffel si $ps = u$.

Si $ps = uvv$, en appliquant la règle de droite sur la paire de Christoffel (u, v) on obtient la paire (uv, v) . Ensuite, en appliquant la règle de gauche n fois, on obtient la paire de Christoffel $((uv)^n, uvv)$. Par conséquent, le mot $c^n ps = (uv)^{n+1} v$ est un mot de Christoffel et $sc^n p$ est l'un de ses conjugués. Donc, $sc^n p$ est un conjugué d'un mot de Christoffel. ■

Corollaire 14. *Soit (s, c^n, p) est la forme normale d'un conjugué d'un mot de Christoffel w , alors c ou $R(c)$ est un facteur de w .*

Démonstration. C'est une conséquence du théorème 14. ■

En fait, le mot c ou $R(c)$ est un ancêtre de w ou $R(w)$ dans l'arbre de Christoffel comme l'illustre la figure 4.6.

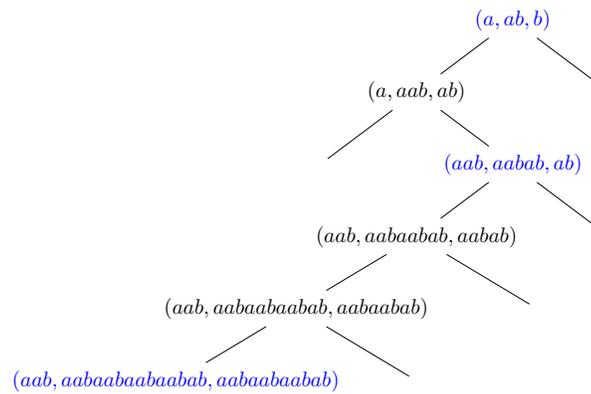


Figure 4.6: Arbre de Christoffel : Les nœuds en noir sont les mots de Christoffel apparaissant dans la forme normale des conjugués du mot de Christoffel $aabaabaabaabab$.

CONCLUSION

L'objectif de ce mémoire est d'explorer les liens entre diverses caractérisations des mots de Christoffel. En plus, une nouvelle caractérisation des conjugués des mots de Christoffel est démontrée. Nous avons regroupé les différentes définitions des mots de Christoffel en deux groupes : les définitions géométriques et celles liées au mot standard.

La plupart des caractérisations des conjugués des mots de Christoffel n'ont pas été présentées. Celles-ci permettent de faire le pont entre les mots de Christoffel et certaines branches de l'informatique. Tout au long du mémoire, nous avons démontré 17 caractérisations des mots de Christoffel. L'abondance de propriétés de cette famille de mots semble être due à la taille réduite de l'alphabet. En effet, sur l'alphabet binaire tous les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. Le mot amb est un produit de palindrome et m est un palindrome ;
2. Le mot m a deux périodes premières $p+q$ entre elles tel que $p+q = |m| - 2$;
3. m est un palindrome itéré ;
4. amb est un mot de Lyndon équilibré ;
5. amb est un mot sturmien non périodique.

Par contre, sur un alphabet plus grand, elles ne sont pas nécessairement équivalentes. Plusieurs définitions des mots de Christoffel sur les alphabets de 3 lettres ont été suggérées, mais aucune ne présente autant de propriétés intéressantes que leurs analogues sur l'alphabet binaire. Un problème serait d'étudier les différentes généralisations des mots de Christoffel sur l'alphabet à trois lettres.

La nouvelle caractérisation des mots de Christoffel nous donne de nouvelles informations sur les conjugués des mots de Christoffel. Par exemple, une formule donnant la période minimale des conjugués des mots de Christoffel en a été déduite. Il serait intéressant de pousser plus loin en tentant de trouver une formule sur la période minimale de tous les facteurs ou de nouvelles régularités dans la répartition des périodes minimales. Les autres caractérisations des conjugués des mots de Christoffel n'ont pas été abordées dans le cadre de ce travail.

APPENDICE A

LISTE DE CARACTÉRISATIONS DES MOTS DE CHRISTOFFEL

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Les mot amb est un mot de Christoffel inférieur ;
2. il existe deux mots de Christoffel u et v tel que $amb = uv$ et

$$\det \begin{pmatrix} |u|_a & |v|_a \\ |u|_b & |v|_b \end{pmatrix} = 1;$$

3. Le mot amb est un produit de palindromes et m est un palindrome ;
4. Les mots amb et bma sont conjugués ;
5. Le mot m a deux périodes premières entres elles p et q telles que $|m| = p+q-2$;
6. Le mot m est un palindrome itéré sur l'alphabet A ;
7. Le mot m est un puissance d'une lettre où $m = PxyQ = QxyP$ avec $P, Q \in \text{PAL}$ et $x \neq y$ des lettres ;
8. Le mot amb représente le graphe de Cayley du groupe $\mathbb{Z}/(p+q)\mathbb{Z}$ avec $\text{PGCD}(p, q) = 1$;
9. Un mot $w = amb$ est un mot de Christoffel propre si et seulement si mab et mba sont des mots standards ;
10. Le mot m est un préfixe palindromique d'une suite caractéristique ;
11. Les mots ma et mb sont équilibrés et m est un palindrome ;

12. Les mots ama , amb , bma et bmb sont équilibrés ;
13. Les mots amb et bma sont équilibrés ;
14. amb est un mot de Lyndon équilibré ;
15. amb est un mot de Lyndon sturmien ;
16. amb est un mot sturmien non périodique qui débute par a et termine par b ;
17. amb est une mot de Lyndon régulier ;
18. amb est un mot de Lyndon ayant $n - 1$ occurrences de facteurs qui sont des mots de Lyndon propres.

BIBLIOGRAPHIE

- Bernouilli, J. (1771). Sur une nouvelle espèce de calcul. *Recueil pour les astronomes*, 1, 255–284.
- Berstel, J. (1990). Tracé de droites, fractions continues et morphismes itérés. In *Mots*, Lang. Raison. Calc. 298–309. Hermès, Paris.
- Berstel, J. (2007). Sturmian and episturmian words (a survey of some recent results). In *Algebraic informatics*, volume 4728 de *Lecture Notes in Comput. Sci.* 23–47. Springer, Berlin.
- Berstel, J. et de Luca, A. (1997). Sturmian words, Lyndon words and trees. *Theoret. Comput. Sci.*, 178(1-2), 171–203.
- Berstel, J., Lauve, A., Reutenauer, C. et Saliola, F. V. (2009). *Combinatorics on words*, volume 27 de *CRM Monograph Series*. American Mathematical Society, Providence, RI.
- Borel, J.-P. et Laubie, F. (1993). Quelques mots sur la droite projective réelle. *J. Théor. Nombres Bordeaux*, 5(1), 23–51.
- Borel, J.-P. et Reutenauer, C. (2005). Palindromic factors of billiard words. *Theoret. Comput. Sci.*, 340(2), 334–348.
- Borel, J.-P. et Reutenauer, C. (2006). On Christoffel classes. *Theor. Inform. Appl.*, 40(1), 15–27.
- Chen, K.-T., Fox, R. H. et Lyndon, R. C. (1958). Free differential calculus. IV. The quotient groups of the lower central series. *Ann. of Math. (2)*, 68, 81–95.
- Christoffel, E. B. (1875). Observatio arithmetica. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 6(2), 148 – 152.
- Chuan, W.-F. (1997). α -words and factors of characteristic sequences. *Discrete Math.*, 177(1-3), 33–50.
- Chuan, W.-f. (1998). Unbordered factors of the characteristic sequences of irrational numbers. *Theoret. Comput. Sci.*, 205(1-2), 337–344.

- Coven, E. M. et Hedlund, G. A. (1973). Sequences with minimal block growth. *Math. Systems Theory*, 7, 138–153.
- Currie, J. D. et Saari, K. (2009). Least periods of factors of infinite words. *Theor. Inform. Appl.*, 43(1), 165–178.
- de Luca, A. (1997a). Combinatorics of standard Sturmian words. In *Structures in logic and computer science*, volume 1261 de *Lecture Notes in Comput. Sci.* 249–267. Springer, Berlin.
- de Luca, A. (1997b). Sturmian words : structure, combinatorics, and their arithmetics. *Theoret. Comput. Sci.*, 183(1), 45–82.
- de Luca, A. et de Luca, A. (2006). Combinatorial properties of Sturmian palindromes. *Internat. J. Found. Comput. Sci.*, 17(3), 557–573.
- de Luca, A. et Mignosi, F. (1994). Some combinatorial properties of Sturmian words. *Theoret. Comput. Sci.*, 136(2), 361–385.
- Dulucq, S. et Gouyou-Beauchamps, D. (1990). Sur les facteurs des suites de Sturm. *Theoret. Comput. Sci.*, 71(3), 381–400.
- Fine, N. J. et Wilf, H. S. (1965). Uniqueness theorems for periodic functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 16, 109–114.
- Harju, T. et Nowotka, D. (2004). Minimal Duval extensions. *Internat. J. Found. Comput. Sci.*, 15(2), 349–354.
- Justin, J. (2005). Episturmian morphisms and a Galois theorem on continued fractions. *Theor. Inform. Appl.*, 39(1), 207–215.
- Lothaire, M. (1983). *Combinatorics on words*, volume 17 de *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.
- Lothaire, M. (2002). *Algebraic combinatorics on words*, volume 90 de *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Lyndon, R. C. (1954). On Burnside’s problem. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 77, 202–215.
- Markoff, A. (1879). Sur les formes quadratiques binaires indéfinies. *Math. Ann.*, 15(3-4), 381–406.
- Markoff, A. (1880). Sur les formes quadratiques binaires indéfinies. 2nd mémoire. *Math. Ann.*, 17(3), 379–399.
- Melançon, G. (1999). Lyndon words and singular factors of Sturmian words.

- Theoret. Comput. Sci.*, 218(1), 41–59.
- Mignosi, F. (1989). Infinite words with linear subword complexity. *Theoret. Comput. Sci.*, 65(2), 221–242.
- Mignosi, F. et Zamboni, L. Q. (2002). A note on a conjecture of Duval and Sturmian words. *Theor. Inform. Appl.*, 36(1), 1–3.
- Morse, M. et Hedlund, G. A. (1940). Symbolic dynamics II. Sturmian trajectories. *Amer. J. Math.*, 62, 1–42.
- Osborne, R. P. et Zieschang, H. (1981). Primitives in the free group on two generators. *Invent. Math.*, 63(1), 17–24.
- Pirillo, G. (2001). A curious characteristic property of standard Sturmian words. In *Algebraic combinatorics and computer science* 541–546. Springer Italia, Milan.
- Reutenauer, C. (2015). Studies on finite Sturmian words. *Theoret. Comput. Sci.*, 591, 106–133.
- Reutenauer, C. (2016). *From Christoffel words to Markoff numbers*. À paraître.
- Series, C. (1985). The geometry of Markoff numbers. *Math. Intelligencer*, 7(3), 20–29.
- Smith, H. J. S. (1876). Note on continued fractions. *Messenger of mathematics*, 6, 1–14.